

1921.

No. 9.

GENERAL LIBRARY

JUN 20 1921

UNIV. OF MICH.

# ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. G. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

**VIERTE FOLGE.**

Band 65. Heft 1.

DER GANZEN REIHE 370. BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



acc 7/7/21  
Titled

LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

DÖRRIENSTRASSE 18.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Im Jahre 1921 erscheinen Bd. 64, 65 und 66 à 8 Hefte. Preis von Bd. 65 M. 60.—.  
Nach dem Ausland in der Währung des betr. Landes.

Ausgegeben am 18. Mai 1921.

# Inhalt.

	Seite
1. O. E. Frivold. Zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus	1
2. A. Sommerfeld. Über den Starkeffekt zweiter Ordnung . .	36
3. J. B. Collo. Ein Sender elektrischer Wellen im Innern einer metallischen Hülle. (Mitgeteilt von R. Gans.) . . . . .	41
4. C. A. Hartmann. Über die Bestimmung des elektrischen Elementarquantums aus dem Schrotaffekt . . . . .	51
5. W. Schottky. Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit .	79
6. Erich Gerold. Über die Dichte, das Brechungsverhältnis und die Dispersion des gasförmigen Stickstoffes bei seiner Siedetemperatur . . . . .	82

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 91.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

**Anderweitiger Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzungen derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuszeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.







## ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 65.

---

**1. Zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus;  
von O. E. Frivold.**

---

**§ 1. Einleitung.**

In seiner bekannten Theorie des Paramagnetismus hat Langevin<sup>1)</sup> mit Hilfe der statistischen Mechanik die Temperaturabhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität studiert und das von Curie experimentell gefundene Gesetz theoretisch begründet. Seine Theorie liefert eine Relation, die es ermöglicht, die Sättigungsmagnetisierung für paramagnetische Körper zu berechnen, wenn man die Magnetisierung des betreffenden Körpers bei einer bestimmten Temperatur und einer bestimmten äußeren Feldstärke mißt. Daß dieses Resultat von großer Bedeutung sein muß, sieht man sofort ein, wenn man daran denkt, daß die Sättigungsmagnetisierung paramagnetischer Körper auch mit den stärksten zur Verfügung stehenden Feldern lange nicht erreicht wird. Wie wir sehen werden, haben diese Ausführungen auch in der Theorie des Ferromagnetismus eine große Rolle gespielt. Das statistische Gleichgewicht der Elementarmagnete wird in der Langevinschen Theorie nur durch 2 Faktoren bedingt: Die richtende Wirkung des äußeren magnetischen Feldes und die Wirkung, die von den Stößen der Elementarmagnete (Moleküle) untereinander herrührt, welche die richtende Wirkung des äußeren Feldes zu stören sucht.

Bei paramagnetischen Gasen und verdünnten Lösungen, wo die molekularen Abstände so groß sind, daß die Wechselwirkung nicht in Betracht kommt, genügen natürlich die Langevinschen Voraussetzungen. Bei solchen Substanzen hat man die Langevinsche Theorie dazu benutzt das magnetische Moment der Elementarmagnete zu berechnen, die speziell in der Magnetonentheorie von P. Weiß eine große Rolle spielen.

---

1) P. Langevin, Ann. de chim. et de phys. (8) 5. S. 70. 1905; Journal de phys. (4) 4. S. 678. 1905.

In den Fällen aber, wo die molekularen Abstände so klein sind, daß die Wechselwirkung in Betracht kommt, darf man diese nicht ohne weiteres in der Theorie außer acht lassen.

Um die Langevinsche Theorie auch auf den Ferromagnetismus ausdehnen zu können, hat P. Weiß<sup>1)</sup> die Hypothese des molekularen magnetischen Feldes in die Theorie eingeführt. Er verfährt ähnlich wie van der Waals bei der Herleitung der Zustandsgleichung der schweren Gase und der Flüssigkeiten. Wie van der Waals den sogenannten „inneren Druck“ einführt, der von der Anziehung der Nachbarmoleküle herrührt, faßt P. Weiß die Richtkräfte der Nachbarmoleküle summarisch zusammen, indem er ein „inneres Feld“ annimmt. Es wird angenommen, daß dieses molekulare Feld ( $H_m$ ) mit der Magnetisierung ( $J$ ) proportional und gleichgerichtet ist.

$$H_m = N_1 \cdot J.$$

Da dieses Feld nach der Berechnung sehr groß sein muß (in Eisen z. B. berechnet sich  $H_m$  zu  $7,10^6$  Gauss; größte experimentell erreichbaren Feldstärken hundertmal so klein), sind die Kriställchen, aus welchen die Substanz besteht, unter Einfluß dieses Feldes bei der betreffenden Temperatur bis zu der bei dieser Temperatur erreichbaren Sättigung magnetisiert. Da aber die Kriställchen in einem Körper ganz unregelmäßig gelagert sind, ist die resultierende Wirkung nach außen gleich Null. Die Wirkung des äußeren Feldes besteht dann darin, die Vektoren der Gesamtmagnetisierung der einzelnen Kriställchen parallel zu richten.

Es liegt nahe, darüber nachzudenken, was die Ursache dieses molekularen Feldes sein kann — ob sie magnetischer Natur ist, oder ob man es mit andern molekularen Kräften zu tun hat. Zwar hat P. Weiß<sup>2)</sup> einige Überlegungen gemacht, welche plausibel machen, daß die magnetischen Kräfte, die von den Molekularmagneten herrühren, nicht genügen, um das molekulare Feld zu erklären. Obwohl diese Überlegungen es wahrscheinlich machen, daß die magnetische Wechselwirkung nur eine untergeordnete Rolle bei der Erklärung des molekularen Feldes spielt, kann erst eine durchgeführte statistische

1) P. Weiß, *Physik. Zeitschr.* 9. S. 358. 1908 u. 12. S. 935. 1911.

2) P. Weiß, *Sur la nature du champ moleculaire.* *Archives des sciences physiques et naturelles.* 37. S. 105. 201. 1913.

Berechnung darüber Aufschluß geben, in welchem Betrag diese Wechselwirkung die Magnetisierung beeinflusst.

Zu dem Zwecke kann man den gleichen Weg einschlagen wie in den Langevinschen Ausführungen, nur daß das statistische Gleichgewicht der Elementarmagnete jetzt nicht nur durch das äußere Feld und die Temperaturbewegung, sondern auch durch die magnetische Wechselwirkung bedingt ist. Im allgemeinen Falle denken wir uns die Elementarmagnete, die wir mit den Atomen identifizieren wollen, in den Eckpunkten eines kubischen Raumgitters, drehbar um ihre Mittelpunkte. Auf ein solches System von Elementarmagneten kann man die Prinzipien der statistischen Mechanik anwenden und in entsprechender Weise wie Langevin einen Ausdruck für die Magnetisierungskurve ableiten. Vergleicht man die Magnetisierungskurve, die man unter diesen Voraussetzungen berechnen kann, mit der Langevinschen Kurve, so ergibt sich der Betrag der Wechselwirkung. Andererseits gestattet dieses Verfahren auch die Berechnung des molekularen magnetischen Feldes. Die Rechnung ist in dieser Arbeit sowohl für das eindimensionale Problem wie für das kubische Raumgitter durchgeführt.<sup>1)</sup>

### Das eindimensionale Problem.

#### § 2. Aufstellung der Fundamentalgleichung.

Die Elementarmagnete, die eine lange Kette (von Anzahl  $N$ ) bilden, sind um ihre Mittelpunkte drehbar. Sie sind im statistischen Gleichgewicht unter dem Einfluß der ungeordneten Temperaturbewegung, der gegenseitigen magnetischen Einwirkung und der des äußeren Feldes. Dieses lassen wir mit der Richtung der Kette zusammenfallen.

Wir legen Koordinatensysteme durch die Mittelpunkte der Elementarmagnete und charakterisieren Richtungen in Polarkoordinaten durch die Winkel  $\theta$  und  $\varphi$  (Polabstand und „geographische Länge“). Das durch  $\sin \theta \, d\theta \, d\varphi$  dargestellte Flächenelement der Einheitskugel wird mit  $d\Omega$  bezeichnet.

---

1) Das kubische Raumgitter ist deshalb gewählt worden, weil die Berechnung in diesem Falle verhältnismäßig leicht durchführbar ist, und das Eisen in diesem System kristallisiert.

Wir lassen die polaren Achsen der Koordinatensysteme mit der Richtung der Kette zusammenfallen.

Nennt man das magnetische Moment der einzelnen Elementarmagnete  $\mu$ , und wird die augenblickliche Lage derselben mit  $\vartheta_1 \varphi_1, \vartheta_2 \varphi_2, \dots, \vartheta_N \varphi_N$  bezeichnet, so gibt die statistische Mechanik als Ausdruck für das mittlere magnetische Moment der Kette bei einer bestimmten, absolut gemessenen Temperatur  $T$  in der Richtung der Verbindungslinie der Mittelpunkte folgenden Ausdruck:

$$(1) \quad M_T = A \int \dots \int \mu \sum_1^N \cos \vartheta_n \cdot e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega_1 d\Omega_2 \dots d\Omega_N.$$

Hier bedeutet  $U$  die potentielle Energie der Kette und  $k$  die Boltzmannsche Konstante ( $k = 1,35 \cdot 10^{-16}$  Erg). Die Integration erstreckt sich über die  $2N$ -Variablen  $\vartheta_1 \varphi_1, \vartheta_2 \varphi_2, \dots, \vartheta_N \varphi_N$ , welche dabei ihren ganzen Wertebereich zu durchlaufen haben.

Die Konstante  $A$  wird durch folgende Überlegung bestimmt: Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Zustandes, der dadurch charakterisiert ist, daß die Achsenrichtungen in den Raumwinkeln  $d\Omega_1, d\Omega_2, \dots, d\Omega_N$  sich befinden, ist:

$$A e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega_1 d\Omega_2 \dots d\Omega_N.$$

Die Integration dieses Ausdruckes, wenn die Koordinaten  $\vartheta, \varphi$  ihren ganzen Wertebereich durchzulaufen haben, gibt die Wahrscheinlichkeit Eins.

Also:

$$(2) \quad A \int \dots \int e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega_1 \cdot d\Omega_2 \dots d\Omega_N = 1.$$

(1) und (2) geben demnach:

$$(3) \quad M_T = \frac{\int \dots \int \mu \sum_1^N \cos \vartheta_n \cdot e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega_1 \cdot d\Omega_2 \dots d\Omega_N}{\int \dots \int e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega_1 \cdot d\Omega_2 \dots d\Omega_N}.$$

### § 3. Die potentielle Energie.

Um die Integration ausführen zu können, muß die potentielle Energie  $U$  erst berechnet werden.

Diese setzt sich zusammen aus der gegenseitigen potentiellen Energie der Elementarmagnete und der potentiellen Energie derselben in bezug auf das äußere Feld.

Die potentielle Energie zweier beliebiger Elementarmagnete, die durch die Indizes  $k$  und  $i$  charakterisiert sind, ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$(4) \quad u = \frac{1}{r_{ki}^3} \left\{ (m_k, m_i) - 3 \left( m_k, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \left( m_i, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \right\}.$$

Der Abstand zwischen den Mittelpunkten der Elementarmagnete  $k$  und  $i$  ist vektoriell und numerisch mit  $r_{ki}$  bzw.  $r_{ki}$ , die magnetischen Momente derselben sind vektoriell bzw. mit  $m_k$  und  $m_i$  bezeichnet.  $(m_k, m_i)$  usw. stellen skalare Produkte dar.

Betrachten wir zuerst den allgemeinen Fall — einen räumlich ausgedehnten Körper — können wir der gegenseitigen potentiellen Energie der Elementarmagnete wie folgt Ausdruck geben:

$$(5) \quad U_1 = \frac{1}{2} \sum_k^N \sum_i^N \frac{1}{r_{ki}^3} \left\{ (m_k, m_i) - 3 \left( m_k, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \left( m_i, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \right\}.$$

Die zweifache Summe muß mit  $1/2$  multipliziert werden, da sonst jedes Glied doppelt vorkommt.  $N$  gibt die Gesamtzahl der Elementarmagnete des Körpers an.

Den Ausdruck (5) können wir auch für den eindimensionalen Fall anwenden. Man kann aber leicht zeigen, daß in diesem Falle der folgende, für die weiteren Berechnungen einfachere Ausdruck mit einer Genauigkeit von etwa 6 Proz. gilt:

$$(6) \quad U_1' = \frac{1}{a^3} \sum_k^{N-1} \left\{ m_k, m_{k+1} \right\} - 3 \left( m_k, \frac{a}{a} \right) \left( m_{k+1}, \frac{a}{a} \right) \right\}.$$

Der gegenseitige Abstand der  $k^{\text{ten}}$  und der  $k+1^{\text{ten}}$  Elementarmagneten ist hier vektoriell und numerisch mit  $a$  bzw.  $a$  bezeichnet.

Die potentielle Energie der Elementarmagnete in bezug auf das äußere Feld wird ausgedrückt durch:

$$U_2 = - \sum_k^N (m_k, \mathfrak{H}).$$

Hier bezeichnet  $\mathfrak{H}$  das äußere Feld als Vektorgröße. Nachstehend wird diese Größe numerisch mit  $H$  bezeichnet.

Die gesamte potentielle Energie wird dann:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= U_1' + U_2 \\ &= \frac{1}{a^3} \sum_1^{N-1} \left[ (m_k, m_{k+1}) - 3 \left( m_k, \frac{a}{\alpha} \right) \left( m_{k+1}, \frac{a}{\alpha} \right) \right] \\ &\quad - \sum_1^N (m_k, \mathfrak{H}). \end{aligned} \right.$$

#### § 4. Das mittlere magnetische Moment eines Elementarmagneten.

Wir wollen folgende Abkürzungen einführen:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^{N-1} f_k &= \Phi, \quad \text{wo } f_k = (m_k, m_{k+1}) - 3 \left( m_k, \frac{a}{\alpha} \right) \left( m_{k+1}, \frac{a}{\alpha} \right), \\ \sum_1^N g_k &= \Psi, \quad \text{wo } g_k = \left( \frac{m_k}{\mu}, \frac{\mathfrak{H}}{H} \right), \\ -\frac{1}{a^3 k T} &= p, \quad \frac{\mu H}{k T} = q, \\ dS &= \frac{d\Omega_1}{4\pi} \cdot \frac{d\Omega_2}{4\pi} \dots \frac{d\Omega_N}{4\pi}. \end{aligned} \right.$$

Aus Gleichung (3) und (7) bekommt man dann als Ausdruck für das mittlere Moment der Kette:

$$(9) \quad M_T = \frac{\mu \int \dots \int \Psi e^{p\Phi + q\Psi} dS}{\int \dots \int e^{p\Phi + q\Psi} dS}$$

und wenn man das Zustandsintegral

$$(10) \quad J = \int \dots \int e^{p\Phi + q\Psi} dS$$

einführt:

$$(11) \quad \frac{M_T}{\mu} = \frac{d}{dq} \log J.$$

Wir brauchen also nur  $J$  auszurechnen.

Es ist nicht gelungen, den Ausdruck  $J$  in geschlossener Form zu integrieren. Um die Integration ausführen zu können, entwickeln wir die Exponentialfunktion in (10) in einer Reihe nach Potenzen von  $p\Phi$ , d. h. nach Potenzen von  $\mu^2/a^3 k T$  und integrieren Gliedweise.

$$(12) \quad J = \int \dots \int e^{q\Psi} (1 + p\Phi + \frac{1}{2}p^2\Phi^2 + \dots) dS.$$

Die Annäherung, die durch die Reihenentwicklung ausgedrückt ist, wird desto besser, je höher die Temperatur ist. Da der Ausdruck nicht nach Potenzen von  $q$  entwickelt ist, gilt der aus  $J$  abgeleitete magnetische Moment für beliebige Feldstärken.

Bei der Integration der Reihenentwicklung (12) treten  $p$  und  $q$  als Konstanten auf.

Man hat in (12) folgende Mittelwerte zu bilden:

$$(13a) \quad D = \int \dots \int e^{q \Psi} dS,$$

$$(13b) \quad D_1 = \int \dots \int e^{q \Psi} p \Phi dS$$

usw.

In den Ausdrücken (13a) und (13b) usw. stellt der Exponent einen Summenausdruck dar, deren einzelne Glieder aus skalaren Produkten zweier Einheitsvektoren ( $m_k/\mu$  und  $\mathfrak{H}/H$ ) bestehen.

Bezeichnet  $\vartheta$  den Winkel, den die Achse eines Elementarmagneten mit der Richtung des äußeren Feldes  $\mathfrak{H}$  bildet,  $\varphi$  das Azimut der durch diese beiden Richtungen gelegten Ebene gegen eine feste durch die  $\mathfrak{H}$ -Achse gehende Ebene, so folgt aus dem Ausdruck (13a) und (8):

$$D = \int \dots \int e^{q \Psi} dS \\ = \int_{\vartheta_1=0}^{\pi} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \dots \int_{\vartheta_N=0}^{\pi} \int_{\varphi_N=0}^{2\pi} e^{q \sum_{k=1}^N \cos \vartheta_k} \prod_{k=1}^{k=N} \frac{\sin \vartheta_k d\vartheta_k d\varphi_k}{4\pi}.$$

Substituiert man  $\cos \vartheta = x$ , so läßt sich das Integral leicht auswerten.

Es ergibt sich:

$$(14) \quad D = \left( \frac{\sinh q}{q} \right)^N = y_0^N.$$

Da die Hyperbelfunktion  $\sinh q/q$  und ihre erste, zweite und dritte Ableitung nach  $q$  in den weiteren Ausführungen oft vorkommen, wollen wir folgende Abkürzungen einführen:





Setzt man die Formel (16) in (13b) ein und führt die Summation aus, so entstehen  $(N-1)$  Glieder, die alle denselben Wert besitzen.

Es folgt daher:

$$D_1 = (N-1) p \mu^2 \int_{\vartheta_1=0}^{\pi} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \dots \int_{\vartheta_N=0}^{\pi} \int_{\varphi_N=0}^{2\pi} e^{q \sum_{m=1}^{N-2} \cos \vartheta_m} \prod_{m=1}^{N-2} \frac{\sin \vartheta_m d\vartheta_m d\varphi_m}{4\pi} \\ \int_{\vartheta_k=0}^{\pi} \int_{\varphi_k=0}^{2\pi} \int_{\vartheta_{k+1}=0}^{\pi} \int_{\varphi_{k+1}=0}^{2\pi} e^{q(\cos \vartheta_k + \cos \vartheta_{k+1})} [\sin \vartheta_k \sin \vartheta_{k+1} \\ \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_k) - 2 \cos \vartheta_k \cos \vartheta_{k+1}] \prod_k^{k+1} \frac{\sin \vartheta_k d\vartheta_k d\varphi_k}{4\pi}.$$

Bei der Integration der zwei letzten mehrfachen Integrale haben  $m_k$  und  $m_{k+1}$  die ganze Kugeloberfläche durchzulaufen, d. h. die Integrationsgrenzen für  $\vartheta_k$  und  $\vartheta_{k+1}$  sind 0 und  $\pi$ , für  $\varphi_k$  und  $\varphi_{k+1}$ , 0 und  $2\pi$ .

Da das Mittel von  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$  zwischen 0 und  $2\pi$  Null ist, wird das erste der zwei Integrale in der eckigen Klammer Null. Substituiert man  $\cos \vartheta = x$ , ist  $D_1$  auswertbar.

$$(17) \quad D_1 = -2(N-1) p \mu^2 y_0^{N-2} y_1^2.$$

In erster Näherung wird nach (12), (14) und (17)

$$(18) \quad J = y_0^N \left[ 1 - 2(N-1) p \mu^2 \left( \frac{y_1}{y_0} \right)^2 + \dots \right]$$

und

$$(18b) \quad \log J = N \log y_0 + 2(N-1) \frac{\mu^2}{a^3 k T} \left( \frac{y_1}{y_0} \right)^2 + \dots$$

Als Ausdruck für das mittlere Moment eines Elementarmagneten im Verhältnis zur absoluten Größe desselben bekommt man:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{M_T}{N\mu} &= \frac{1}{N} \frac{d}{dq} \log J = \frac{y_1}{y_0} + 4 \frac{\mu^2}{a^3 k T} \frac{y_1}{y_0} \frac{y_0 y_2 - y_1^2}{y_0^2} + \dots \\ &= \left( \cotg_h q - \frac{1}{q} \right) \left[ 1 + 4 \frac{\mu^2}{a^3 k T} \frac{d}{dq} \left( \cotg_h q - \frac{1}{q} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Wenn die Wechselwirkung der Elementarmagnete nicht in Rechnung gezogen wird, fällt das zweite Glied in der eckigen Klammer weg, und man bekommt den bekannten Langevinschen Ausdruck.

Um zu sehen, welche Abweichungen von dem Langevinschen Ausdruck die Wechselwirkung mit sich bringt, wollen wir in dem Ausdruck (19) Zahlenwerte einsetzen. Nehmen wir an, daß die Kette aus Eisenatomen bestände, so haben wir für  $\mu$  den Wert  $11 \cdot 16 \cdot 10^{-22}$  einzusetzen (nach Weiß besteht das Eisenatom aus 11 Magnetonen und jedes Magneton hat den Wert  $16 \cdot 10^{-22}$  C.G.S.). Für  $a$  setzen wir ansatzweise  $2 \cdot 10^{-8}$  cm und  $T = 300^\circ$  abs.  $k = 1,35 \cdot 10^{-16}$  ein.

Dann wird:

$$\frac{4\mu^2}{a^3 k T} = 3,7 \cdot 10^{-3}.$$

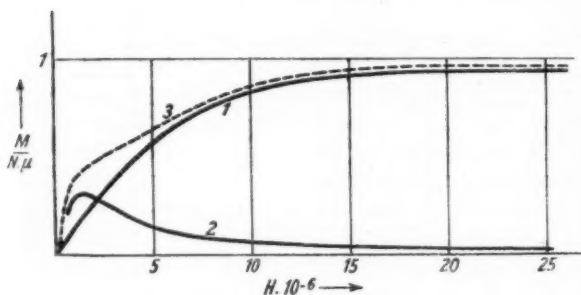


Fig. 2.

In Fig. 2 stellt die Kurve 1 die Langevinsche Funktion, die Kurve 2 stellt die Funktion  $\frac{d}{dq} \left( \cotg_A q - \frac{1}{q} \right)$  dar.

Mit den oben angegebenen Zahlenwerten bekommt der letzte Ausdruck maximal den Wert  $1/3$  bei einer Feldstärke von der Größenordnung  $10^6$  Gauss.

Das mittlere magnetische Moment eines Elementarmagneten, wenn die Wechselwirkung berücksichtigt wird, ist durch die Kurve 3 veranschaulicht.

Da die Wechselwirkung aber nach den obigen Ausführungen die Ordinaten der Langevinschen Kurve um einen Betrag vergrößert, der maximal nur  $1/1000$  der absoluten Größe derselben ist, so sieht man, daß die Kurve 3 die Wechselwirkung stark vergrößert wiedergibt.

Die Kette ist also auch dann, wenn die Wechselwirkung berücksichtigt wird, bei hohen Temperaturen durch den Paramagnetismus gekennzeichnet.

## § 5. Zweite Näherung.

Um die komplizierteren Rechnungen im räumlichen Falle zu erläutern und wegen Vergleichen zwischen dem eindimensionalen und räumlichen Falle ausführen zu können, soll hier auch die zweite Näherung in  $J$  (12) berechnet werden.

Man hat dann in der Reihenentwicklung (12) das Integral

$$(20) \quad D_2 = \frac{1}{2} p^2 \int \dots \int e^{q \Psi} \Phi^2 dS$$

zu berechnen.

Nach (8) ist

$$(21) \quad \Phi^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} f_k f_i,$$

wo

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} f_k f_i &= (m_k, m_{k+1}) (m_i, m_{i+1}) \\ &- 3 (m_k, m_{k+1}) (m_i, a/a) (m_{i+1}, a/a) \\ &- 3 (m_i, m_{i+1}) (m_k, a/a) (m_{k+1}, a/a) \\ &+ 9 (m_k, a/a) (m_{k+1}, a/a) (m_i, a/a) (m_{i+1}, a/a). \end{aligned} \right.$$

Führt man die Summation vom Ausdruck (20) aus, indem man von den Ausdrücken (21) und (22) Gebrauch macht, ergeben sich zwei Gruppen von Gliedern. Die eine Gruppe entspricht der Kombination  $k \neq i$ , die andere der Kombination  $k = i$ . Die Mittelungen, die man auszuführen hat, sind bzw. für die Kombination  $k \neq i$  und  $k = i$  gleich. Da es  $(N-1)$  Glieder der Kombination  $k = i$  gibt, und die Gesamtanzahl  $(N-1)^2$  ist, bleibt  $(N-1)^2 - (N-1)$  für die Kombination  $k \neq i$  übrig.

Daraus folgt:

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} D_2 &= [(N-1)^2 - (N-1)] \frac{1}{2} p^2 \int \dots \int e^{q \Psi} f_k f_{i_{k \neq i}} dS \\ &+ (N-1) \frac{1}{2} p^2 \int \dots \int e^{q \Psi} f_k f_{i_{k=i}} dS. \end{aligned} \right.$$

Die Mittelwerte, die man dann auszuwerten hat, bekommt man, indem man den Ausdruck (22) in (23) einsetzt. Sie können in ähnlicher Weise wie in (13b) berechnet werden. Hier sollen nur die Endresultate angegeben werden.

(Die Bedeutung von  $y_0, y_1 \dots$  vgl. die Abkürzungen (15))

$$(24) \left\{ \begin{aligned} & \int \dots \int e^{q\psi}(m_k, m_{k+1})(m_i, m_{i+1}) dS \\ & \quad = \mu^4 y_0^{N-4} y_1^4 \quad \dots \quad k \neq i \\ & \quad = \mu^4 y_0^{N-2} [y_2^2 + \frac{1}{2}(y_0 - y_2)^2] \quad \dots \quad k = i \\ & \int \dots \int e^{q\psi}(m_k, m_{k+1})(m_i, a/a)(m_{i+1}, a/a) dS \\ & \int \dots \int e^{q\psi}(m_i, m_{i+1})(m_k, a/a)(m_{k+1}, a/a) dS \\ & \quad = \mu^4 y_0^{N-4} y_1^4 \quad \dots \quad k \neq i \\ & \quad = \mu^4 y_0^{N-2} y_2^2 \quad \dots \quad k = i \\ & \int \dots \int e^{q\psi}(m_k, a/a)(m_{k+1}, a/a)(m_i, a/a)(m_{i+1}, a/a) dS \\ & \quad = \mu^4 y_0^{N-4} y_1^4 \quad \dots \quad k \neq i \\ & \quad = \mu^4 y_0^{N-2} y_2^2 \quad \dots \quad k = i \end{aligned} \right.$$

Aus (12), (13a), (13b), (14), (17), (22), (23) und (24) folgt:

$$\begin{aligned} J &= \int \dots \int e^{q\psi} (1 + p\Phi + \frac{1}{2}p^2\Phi^2 + \dots) dS \\ &= y_0^N \left[ 1 - 2p\mu^2(N-1) \left( \frac{y_1}{y_0} \right)^2 + 2p^2\mu^4(N-1)(N-2) \left( \frac{y_1}{y_0} \right)^4 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}p^2\mu^4(N-1) \{ 4y_2^2 + \frac{1}{2}(y_0 - y_2)^2 \} \left( \frac{1}{y_0} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \log J &= N \left[ \log y_0 - 2p\mu^2 \left( \frac{y_1}{y_0} \right)^2 + \frac{1}{2}p^2\mu^4 \{ 4y_2^2 + \frac{1}{2}(y_0 - y_2)^2 \} \frac{1}{y_0^2} \right. \\ & \quad \left. - 2p^2\mu^4 \left( \frac{y_1}{y_0} \right)^4 + \dots \right], \end{aligned}$$

wenn man berücksichtigt, daß  $N$  eine große Zahl ist.

Die quadratischen Glieder in  $N$  fallen also im Endresultat wieder fort.

Man bekommt schließlich, indem man  $\log J$  nach  $q$  differenziert und das Resultat etwas umschreibt:

$$(25) \left\{ \begin{aligned} \frac{M_T}{N\mu} &= \frac{1}{N} \frac{d}{dq} \log J = \frac{y_1}{y_0} \left[ 1 + 4 \frac{\mu^2}{a^2 k T} \frac{y_0 y_2 - y_1^2}{y_0^2} + \frac{1}{2} \frac{\mu^4}{a^4 k^2 T^2} \right. \\ & \quad \left. \left\{ \frac{(9y_2 - y_0)(y_0 y_2 - y_1 y_2)}{y_0^2 y_1} - 16 \frac{y_1^2}{y_0^4} (y_0 y_2 - y_1^2) \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

## § 6. Kleine Feldstärken.

Entwickelt man  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  und  $y_3$  in (25) nach Potenzen von  $q$  und läßt man quadratische und höhere Glieder fort, was bei kleinen Feldstärken zulässig ist, so erhält man nach einigen Berechnungen:

$$(26) \quad \frac{M}{N\mu} = \frac{1}{3} \frac{\mu H}{kT} \left[ 1 + \frac{4}{3} \frac{\mu^2}{a^2 kT} \left( 1 + \frac{1}{5} \frac{\mu^2}{a^2 kT} \right) \right].$$

Aus Gleichung (26) geht hervor, daß das mittlere Moment eines Elementarmagneten eine lineare Funktion von  $\mu H / kT$ , d. h. dem äußeren Feld direkt proportional ist.

Da  $\mu$  selten den Wert  $3 \cdot 10^{-20}$  C.G.S. erreicht, ist  $q (= \mu H / kT)$  bei gewöhnlicher Temperatur von der Größenordnung  $\frac{1}{10^6} H$ . Da  $H$  maximal den Wert 50000 erreichen kann, bleibt  $q$  immer  $\ll 1$ . Die Reihenentwicklung ist daher bei den erreichbaren äußeren Feldern immer zulässig.

Bezeichnet man die Anzahl der Elementarmagnete per cm mit  $g$ , dann kann man nach Weiß setzen:

$$(27) \quad M = \alpha \left( H + \beta \frac{M}{N} g \right).$$

$\beta$  hat die entsprechende Bedeutung für die Kette wie  $N_1$  für einen ausgedehnten Körper (vgl. S. 2).

$\frac{M}{N} g$  gibt den Magnetisierungskoeffizienten der Kette an.

Das Glied  $\beta \frac{M}{N} g$  stellt das molekulare Feld der Kette dar.

Aus Gleichung (27) bekommt man:

$$(28) \quad M = \frac{\alpha H}{1 - \alpha \beta \frac{g}{N}} = \alpha H \left( 1 + \frac{\alpha \beta}{N} g + \dots \right).$$

Der Vergleich von Gleichung (26) und (28) ergibt:

$$(29) \quad \alpha = \frac{1}{3} \frac{N \mu^2}{kT}$$

und

$$(30) \quad \beta = \frac{4}{a^2 g} \left( 1 + \frac{1}{5} \frac{\mu^2}{a^2 kT} \right).$$

Aus den Ausdrücken (27), (29) und (30) folgt:

$$(31) \quad M = \frac{1}{3} \frac{N \mu^2}{kT} \left[ H + \frac{4}{a^2 g} \left( 1 + \frac{1}{5} \frac{\mu^2}{a^2 kT} \right) \frac{M}{N} g \right].$$

Die statistische Berechnung zeigt also, daß die molekulare Größe  $\beta$  eine Temperaturfunktion ist.

## § 7. Spezialisierung.

Der Ausdruck (26) ist unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Elementarmagnete im Raume um ihre Mittelpunkte drehbar sind.

Stellt man die Bedingung auf, daß die Achsen der Elementarmagnete nur in einer Ebene drehbar sind, dann zeigt sich, daß die Reihenentwicklung (12) nicht integrierbar ist. Um  $J$  auswerten zu können, muß man den Ausdruck  $e^{p\Phi + q\Psi}$  nach Potenzen von  $p\Phi + q\Psi$  entwickeln.

Also nach (10)

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} J = \int \dots \int & \left\{ 1 + (p\Phi + q\Psi) + \frac{1}{2}[p^2\Phi^2 + 2pq\Phi\Psi + q^2\Psi^2] \right. \\ & + \frac{1}{6}[p^3\Phi^3 + 3p^2q\Phi^2\Psi + 3pq^2\Phi\Psi^2 + q^3\Psi^3] \\ & + \frac{1}{24}[p^4\Phi^4 + 4p^3q\Phi^3\Psi + 6p^2q^2\Phi^2\Psi^2 + 4pq^3\Phi\Psi^3 \\ & \left. + q^4\Psi^4] \right\} dS, \end{aligned} \right.$$

wobei

$$\Phi = \mu^2 \sum_1^{N-1} f_k^{(1)}, \quad \text{wo} \quad f_k = \sin \vartheta_k \sin \vartheta_{k+1} - 2 \cos \vartheta_k \cos \vartheta_{k+1},$$

$$\Psi = \sum_1^N g_k, \quad \text{wo} \quad g_k = \cos \vartheta_k$$

und

$$dS = \frac{d\vartheta_1}{2\pi} \dots \frac{d\vartheta_N}{2\pi}$$

ist.

Diese Reihenentwicklung gilt also nur für hohe Temperaturen und kleine Felder.

Wertet man die einzelnen Glieder in der Reihenentwicklung (32) aus und bildet Ausdrücke, die (18b) und (19) entsprechen, so bekommt man:

$$(33) \quad \frac{M}{N\mu} = \frac{1}{2} \frac{\mu H}{kT} \left[ 1 + \frac{3}{16} \frac{\mu^4}{a^3 k^3 T^2} - \frac{1}{16} \left( \frac{\mu H}{kT} \right)^2 \right].$$

Bei kleinen Werten von  $H$  kann das letzte Glied fortgelassen werden. Vergleicht man den Ausdruck (33) mit (26),

1)  $\Phi$  geht aus Formel (16) hervor, wenn man in dieser Formel  $\varphi_{k+1} - \varphi_k = 0$  setzt. (Die Bedingung dafür, daß die Drehung in einer Ebene stattfindet.)

dann sieht man, daß das Glied mit  $\mu^2 / a^3 k T$  im Ausdruck (39) nicht vorkommt. Dieser Umstand bewirkt, daß die Wechselwirkung in diesem Falle eine viel kleinere Rolle spielt als wenn diese einschränkende Bedingung nicht gilt. (Drehbarkeit im Raume).

Mit den früher benützten Werten von  $\mu$ ,  $a$ ,  $h$  und  $T$  (S. 10) bekommt man nämlich

$$\frac{\mu^2}{a^3 k T} \cong 10^{-3}$$

und

$$\left( \frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 \cong 10^{-6}.$$

Setzt man diese Größen in die Ausdrücke (26) und (39) ein, sieht man, daß die Wechselwirkung in den zwei Fällen sich verhält wie:  $1/6 \cdot 10^4$ .

### § 8. Tiefe Temperaturen.

Es kann gezeigt werden, daß das Integral (10), von dem die ganze Lösung der Aufgabe abhängt, bei den Vereinfachungen, die man in der Nähe des absoluten Nullpunktes einführen kann, in geschlossener Form ausgewertet werden kann.

Zu dem Zwecke wollen wir den Exponenten in (10) folgendermaßen umformen.

Aus (8) und (16) folgt, wenn wir den Ausdruck  $p\Phi + q\Psi$  mit  $E$  bezeichnen:

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= p\Phi + q\Psi = -\frac{U}{kT} \\ &= p\mu^2 \sum_1^{N-1} \{ \sin \vartheta_k \sin \vartheta_{k+1} \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_k) - 2 \cos \vartheta_k \cos \vartheta_{k+1} \} \\ &\quad + q \sum_1^N \cos \vartheta_k. \end{aligned} \right.$$

Stellt man die Bedingungsgleichungen dafür auf, daß die potentielle Energie und — was auf das gleiche hinauskommt — der Ausdruck (34) ein Minimum ist, findet man leicht folgende Lösung des Gleichungssystems:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \dots = \vartheta_N = 0.$$

In der Nähe des absoluten Nullpunkts, der durch ein Minimum der potentiellen Energie gekennzeichnet ist, kann daher in erster Näherung substituiert werden:

$$\sin \vartheta_k = \vartheta_k \quad \text{und} \quad \cos \vartheta_k = 1 - \frac{1}{2} \vartheta_k^2.$$

Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $(\xi, \eta)$  zugrunde, senkrecht auf der Richtung  $\mathfrak{S}$  (Fig. 1), mit dem Ursprung in  $a$  und mit der  $\xi$ -Achse in der Meridianebene  $abc$ . Zwischen den zwei Koordinatensystemen bestehen dann folgende Relationen:

$$(35) \quad \begin{cases} \sin \vartheta_k = \vartheta_k = \sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2}, & \cos \vartheta_k = 1 - \frac{1}{2} \vartheta_k^2 = 1 - \frac{1}{2} (\xi_k^2 + \eta_k^2) \\ \cos \varphi_k = \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2}}, & \sin \varphi_k = \frac{\eta_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2}}. \end{cases}$$

Substituiert man die Ausdrücke (35) in (34), bekommt man:

$$(36) \quad \begin{cases} E = \frac{2p\mu^2 - q}{2} (\xi_1^2 + \xi_N^2 + \eta_1^2 + \eta_N^2) + \frac{4p\mu^2 - q}{2} \\ \quad (\xi_2^2 + \xi_3^2 + \dots + \xi_{N-1}^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \dots + \eta_{N-1}^2) \\ \quad + p\mu^2 (\xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \dots + \xi_{N-1} \xi_N + \eta_1 \eta_2 + \eta_2 \eta_3 \\ \quad + \dots + \eta_{N-1} \eta_N) - (2p\mu^2 - q)N. \end{cases}$$

Der Exponent in (10) stellt also eine quadratische Funktion dar. Da  $N$  eine sehr große Zahl repräsentiert, ist es zulässig, das erste und letzte rein quadratische Glied in  $\xi$  und  $\eta$  gleich den  $N - 2$  übrigen zu setzen.

Da die potentielle Energie und deshalb auch der Exponent in (10) beim absoluten Nullpunkt ein Minimum hat,

und daher die Exponentialfunktion selbst  $e^{-\frac{U}{kT}}$  in diesem Punkte ein Maximum annimmt, ist es zulässig, die Integrationsgrenzen in (10) von  $-\infty$  bis  $+\infty$  zu erweitern.

Setzt man

$$(37) \quad -\frac{4p\mu^2 - q}{2} = m \quad \text{und} \quad -\frac{p\mu^2}{2} = n,$$

so folgt aus (10) unter Berücksichtigung von (36)

$$J = e^{-(2p\mu^2 - q)N} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m \left[ \sum_1^N \xi_k^2 + \sum_1^N \eta_k^2 \right] - 2n \left[ \sum_1^{N-1} \xi_k \xi_{k+1} + \sum_1^{N-1} \eta_k \eta_{k+1} \right]} d\xi_1 \dots d\xi_N \cdot d\eta_1 \dots d\eta_N.$$

Mit Benützung der Integrationsformel<sup>1)</sup>:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mx^2 - 2nx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{m}} \cdot e^{\frac{n^2}{m}}$$

1) Vgl. z. B. H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. 5. Aufl. Bd. I. S. 28. Braunschweig 1910.



und indem man sukzessive nach  $\xi_1, \xi_2$  usw. integriert, ergibt sich:

$$(38) \quad J^2 = e^{-2(2p-q)N} \frac{\pi^{2N}}{\left\{ m \left( m - \frac{n^2}{m} \right) \left( m - \frac{n^2}{\beta_1} \right) \left( m - \frac{n^2}{\beta_2} \right) \dots \left( m - \frac{n^2}{\beta_{N-2}} \right) \right\}^2};$$

dabei ist:

$$(38a) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_1 &= m - \frac{n^2}{m}, \quad \beta_2 = m - \frac{n^2}{\beta_1}, \quad \beta_3 = m - \frac{n^2}{\beta_2}, \\ &\dots \beta_{N-2} = m - \frac{n^2}{\beta_{N-3}}. \end{aligned} \right.$$

Substituiert man im Ausdrucke (38)

$$(38b) \quad \beta_1 = m \gamma_1, \quad \beta_2 = m \gamma_2, \quad \dots \beta_{N-2} = m \cdot \gamma_{N-2},$$

wo  $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_{N-2}$  neue Variablen sind, ergibt sich:

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} J^2 &= e^{-2(2p-q)N} \frac{\pi^{2N}}{m^{2N} \left[ 1 \cdot \left( 1 - \frac{n^2}{m^2} \right) \left( 1 - \frac{n^2}{m^2 \gamma_1} \right) \left( 1 - \frac{n^2}{m^2 \gamma_2} \right) \right.} \\ &\quad \left. \dots \left( 1 - \frac{n^2}{m^2 \gamma_{N-2}} \right) \right]^2} \end{aligned} \right.$$

und wenn man die eckige Klammer in der Formel (39) mit  $P$  und

$$(40) \quad \frac{n}{m} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \frac{H a^3}{4 \mu}}$$

mit  $\varepsilon$  bezeichnet:

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} \log P &= \log(1 - \varepsilon^2) + \log\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma_1}\right) + \log\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma_2}\right) \\ &\quad + \dots + \log\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma_{N-2}}\right). \end{aligned} \right.$$

Entwickelt man die Logarithmen im Ausdruck (41) nach Potenzen von  $\varepsilon^2, \varepsilon^2/\gamma_1$  usw. und substituiert man in den Reihenentwicklungen nach (38a) und (38b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_1} &= \frac{1}{1 - \varepsilon^2} = 1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \dots; \\ \frac{1}{\gamma_2} &= \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma_1}} = 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon^4 + \dots \text{ usw.}, \end{aligned}$$

so kann man den Ausdruck (41) folgendermaßen schreiben:

$$(42) \quad \log P = -N \frac{n^3}{m^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{n^2}{m^2} + 3 \frac{n^4}{m^4} + \dots \right].$$

Diese Reihe konvergiert, wenn  $\frac{n}{m} \ll 1$ , d. h. nach (40), wenn

$$(42') \quad \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \frac{H a^3}{4 \mu}} \ll 1.$$

Die Bedingung (42') ist für genügend hohe Felder  $H$  erfüllt.

In erster Näherung kann man sich daher auf die zwei ersten Glieder in der Reihe (42) beschränken.

Dann ergibt sich aus den Formeln (39) und (42)

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log J = -N(2p\mu^2 - q) + N \\ \left[ \log \pi - \log m + \frac{n^2}{m^2} + \frac{3}{2} \frac{n^4}{m^4} + \dots \right] \end{array} \right.$$

Nach (10), (11) und (43) wird dann:

$$(44) \quad \frac{M_T}{N\mu} = \frac{d}{dq} \log J = 1 - \frac{1}{2m} \left[ 1 + 2 \frac{n^2}{m^2} + \dots \right].$$

Hier wird  $n/m$  durch den Ausdruck (40) bestimmt.  $m$  hat nach (37) und (8) den Wert

$$(44') \quad m = 2 \frac{\mu^2}{a^3 k T} + \frac{\mu H}{2 k T}.$$

Danach wird  $M_T/N\mu$  vom äußeren Felde abhängig sein, und als Funktion des Feldes einen Verlauf zeigen, wie ihn Fig. 3 für verschiedene Temperaturen darstellt.

Um die Feldabhängigkeit von  $M/N\mu$  sowohl für schwache wie starke Felder darstellen zu können, ist in Fig. 3  $\log H$  an Stelle von  $H$  als Abszisse eingetragen.<sup>1)</sup>

Da die Ableitung (44) nicht für extrem schwache äußere Felder besteht (der Ausdruck  $q = \mu H/kT$  wird nämlich unbestimmt, wenn sowohl  $T$  wie  $H \rightarrow 0$  geht), sind die Kurven auf ihren ersten Strecken gestrichelt.

Die Kurven zeigen, daß das mittlere Moment der Elementarmagnete bei einem kleineren äußeren Felde plötzlich steigt; es wird dann fast konstant für Felder bis auf etwa 1000 C.G.S., steigt dann allmählich bis  $H$  etwa  $10^6$  und strebt dann nachher

1) Bei der Auswertung sind für die Größen  $\mu$ ,  $a$  und  $k$  dieselben Werte wie früher benutzt. (Vgl. S. 10.)

einem Maximum zu. Der erste plötzliche Anstieg der Kurven, hat seine Ursache in dem molekularen Felde, das durch die Wechselwirkung der Elementarmagnete zustande kommt. Die absolute Sättigung tritt erst bei ungeheuer großen Feldern ein. In paramagnetischen Substanzen würde eine derartige Sättigung auch nach der Langevinschen Theorie für sehr große Felder

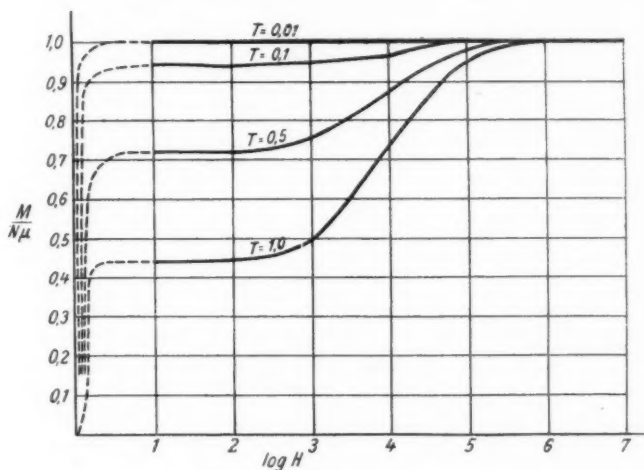


Fig. 3.

eintreten. Fig. 3 zeigt zugleich, daß die Sättigung schon für kleine Felder bei  $T = 0,01$  eintritt.

Die Kette zeigt also bei niedrigen Temperaturen Eigenschaften, die charakteristisch sind für die ferromagnetischen Körper. Außerdem zeigt die Berechnung, daß die Kette bei hohen Temperaturen die ferromagnetischen Eigenschaften verliert und in einen paramagnetischen Körper übergeht. Der Übergang von dem einen in den andern Zustand findet in der Nähe des absoluten Nullpunkts statt. Ob dieser Übergang bei dem Raumgitter erst bei hohen Temperaturen stattfindet, und ob die Wechselwirkung in der Weise auch quantitativ die ferromagnetischen Eigenschaften erklären kann, darauf können nur die weiteren Ausführungen Antwort geben.

## Das Raumgitter.

## § 9. Die Fundamentalausdrücke.

Die Rechnung ist analog durchzuführen für das räumliche Problem wie bei dem eindimensionalen Problem.

Die Elementarmagnete denken wir uns in den Eckpunkten eines kubischen Raumgitters angeordnet. Ihre Koordinaten lassen sich also in folgender Form darstellen:

$$X = a \cdot l, \quad Y = a \cdot m, \quad Z = a \cdot n,$$

wo  $a$  die Gitterkonstante angibt und  $l, m, n$  von Eins bis zu einer Zahl laufen, die gerade dem äußersten in dem betrachteten Raumgitter sich befindenden Elementarmagneten entspricht. Bei Berechnung des mittleren Momentes des Körpers verfahren wir ganz ähnlich wie bei dem eindimensionalen Problem. Die vorher aufgestellten Fundamentalausdrücke (3), (8), (9), (10), (11) und (12) können wir für den räumlichen Fall verwenden, wenn wir diese Ausdrücke dem neuen Zweck anpassen. Der Ausdruck (3) gilt auch für den räumlichen Fall, wenn  $U$  die potentielle Energie des gesamten Körpers bedeutet. Sowohl die Polrichtung des Polarkoordinatensystems  $(\vartheta, \varphi)$  wie die Richtung des äußeren Feldes lassen wir mit der  $X$ -Achse zusammenfallen.

Wenn die erste einfache Summe im Ausdruck (7) mit der Doppelsumme (5) ersetzt wird, ist die potentielle Energie des Körpers durch den Ausdruck (7) bestimmt. Also:

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} U = \frac{1}{2} \sum_k^N \sum_i^N \frac{1}{r_{ki}^3} \left\{ (m_k, m_i) - 3 \left( m_k, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \left( m_i, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \right\} \\ - \sum_i^N \left( \frac{m_k}{\mu}, \frac{\Phi}{H} \right) \mu H. \end{aligned} \right.$$

Setzt man:

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_k^N \sum_i^N \left( \frac{a}{r_{ki}} \right)^3 f_{ki} &= \frac{1}{2} \sum_k^N \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 \cdot f_{ki} = \Phi, \\ \text{wo } \varrho_{ki} &= \frac{r_{ki}}{a} \quad \text{und} \quad f_{ki} = (m_k, m_i) - 3 \left( m_k, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \left( m_i, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right), \\ \sum_i^N g_k &= \Psi, \quad \text{wo} \quad g_k = \left( \frac{m_k}{\mu}, \frac{\Phi}{H} \right), \end{aligned} \right.$$

$$(46) \left\{ \begin{array}{l} \text{und} \\ p = -\frac{1}{a^3 k T}, \quad q = \frac{\mu H}{k T} \\ dS = \frac{d\Omega_1}{4\pi}, \frac{d\Omega_2}{4\pi} \dots \frac{d\Omega_N}{4\pi}, \end{array} \right.$$

so stellt der Ausdruck (9) das mittlere Moment des Körpers dar.

### § 10. Erste Näherung.

Bei der Berechnung des Zustandsintegrals (12) hat man auch hier wie bei dem eindimensionalen Problem die Ausdrücke (13a) und (13b) auszuwerten. Das erste dieser Integrale bleibt unveränderlich, das zweite berechnet sich in ähnlicher Weise wie (13b), nur muß man beachten, daß der Vektor  $\mathbf{r}_{ki}$  im allgemeinen nicht mit dem Vektor  $\mathfrak{S}$  zusammenfällt, wie vorher  $\mathbf{a}$  und  $\mathfrak{S}$  (vgl. Fig. 1).

Nach (13b) und (46) bekommt man:

$$\begin{aligned} D_1' &= \frac{1}{2} p \int \dots \int e^{q \sum_1^N \left( \frac{m_k}{\mu}, \frac{\mathfrak{S}}{H} \right)} \\ &\quad \sum_1^N \sum_1^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 \left\{ (m_k, m_i) - 3 \left( m_k, \frac{\mathbf{r}_{ki}}{r_{ki}} \right) \left( m_i, \frac{\mathbf{r}_{ki}}{r_{ki}} \right) \right\} dS \\ &= \frac{1}{2} p \sum_1^N \sum_1^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 \int \dots \int e^{q \sum_1^N \left( \frac{m_k}{\mu}, \frac{\mathfrak{S}}{H} \right)} \\ &\quad \left\{ (m_k, m_i) - 3 \left( m_k, \frac{\mathbf{r}_{ki}}{r_{ki}} \right) \left( m_i, \frac{\mathbf{r}_{ki}}{r_{ki}} \right) \right\} dS. \end{aligned}$$

Da die Größen  $\varrho$  bei den Integrationen als Konstanten aufzufassen sind, ist die letzte Umformung zulässig.

Um dieses Integral auszuwerten, substituiert man in ähnlicher Weise wie früher bei Berechnung von (13b).

Bezeichnet  $\delta_{ki}$  den Winkel zwischen dem Vektor  $\mathbf{r}_{ki}$  und der Richtung von  $\mathfrak{S}$ , bekommt man:

$$(47) \quad D_1' = \frac{1}{2} p \mu^2 \sum_1^N \sum_1^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 y_0^{N-2} y_1^2 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}).$$

Da die Richtung von  $\mathfrak{S}$  mit der X-Achse zusammenfällt, so wird:

$$(48) \quad \cos^2 \delta_{ki} = \frac{l^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Außerdem hat man:

$$(48a) \quad \left(\frac{1}{\varrho_{ki}}\right)^3 = \frac{1}{(l^2 + m^2 + n^2)^{3/2}}.$$

$l$ ,  $m$  und  $n$  gibt die Koordinaten des  $i^{\text{ten}}$  Elementarmagneten mit der Gitterkonstante  $a$  dividiert an, wenn der  $k^{\text{te}}$  Elementarmagnet zum Koordinatenanfangspunkt gewählt wird.

In erster Näherung ergibt sich nach (12), (14) und (47):

$$J = \int \dots \int e^{q\psi} (1 + p\Phi + \dots) dS \\ = y_0^N \left[ 1 + \frac{1}{2} p \mu^2 \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 \sum_1^N \sum_1^N \left(\frac{1}{\varrho_{ki}}\right)^3 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) \right]$$

und

$$(49) \quad \log J = N \log y_0 + \frac{1}{2} p \mu^2 \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 \sum_1^N \sum_1^N \left(\frac{1}{\varrho_{ki}}\right)^3 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}).$$

Als Ausdruck für das mittlere Moment  $M$  des Raumgitters bekommt man dann:

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{M}{N\mu} &= \frac{1}{N} \frac{d}{dq} \log J = \frac{y_1}{y_0} \left[ 1 + p \mu^2 \frac{y_0 y_2 - y_1^2}{y_0^2} \sum_1^N \sum_1^N \left(\frac{1}{\varrho_{ki}}\right)^3 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) \right] \\ &= \left( \cotg_k q - \frac{1}{q} \right) \left[ 1 + p \mu^2 \frac{d}{dq} \left( \cotg_k q - \frac{1}{q} \right) \right. \\ &\quad \left. \sum_1^N \sum_1^N \left(\frac{1}{\varrho_{ki}}\right)^3 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) \right]. \end{aligned} \right.$$

Nach (48) und (48a) kann der Summeausdruck in (50) folgendermaßen geschrieben werden:

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^N \sum_1^N \left(\frac{1}{\varrho_{ki}}\right)^3 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) &= N \sum_1^N \left(\frac{1}{\varrho_{ki}}\right)^3 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) \\ &= N \left[ \sum_1^N \frac{1}{(l^2 + m^2 + n^2)^{3/2}} - 3 \sum_1^N \frac{1}{(l^2 + m^2 + n^2)^{3/2}} \frac{l^2}{l^2 + m^2 + n^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Jetzt kommt es darauf an, geschickt zu summieren. Für das kubische Raumgitter ist es leicht einzusehen, daß:

$$(52) \left\{ \begin{aligned} \sum \frac{l^3}{(l^3 + m^3 + n^3)^{3/2}} &= \sum \frac{m^3}{(l^3 + m^3 + n^3)^{3/2}} \\ &= \sum \frac{n^3}{(l^3 + m^3 + n^3)^{3/2}} = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{(l^3 + m^3 + n^3)^{3/2}}, \end{aligned} \right.$$

wenn die Summation sich über eine ganze Anzahl von Würfeln erstreckt.

Nach den Relationen (52) folgt, daß das letzte Glied in der eckigen Klammer in (51) dem ersten Glied numerisch gleich, aber vom entgegengesetzten Zeichen ist. Das letzte Glied in (50) wird also Null und man bekommt:

$$(53) \quad \frac{M}{N\mu} = \cotg_h q - \frac{1}{q}.$$

In erster Näherung erhalten wir also den bekannten Langevinschen Ausdruck.

### § 11. Zweite Näherung.

Die Rechnung soll deshalb auch in zweiter Näherung durchgeführt werden. Es handelt sich also noch darum, das letzte der drei Integrale in der Reihenentwicklung (12) auszuwerten.

Nach (12) und (46) ist:

$$(54) \left\{ \begin{aligned} D_2' &= \frac{1}{2} p^2 \int \dots \int e^{q \cdot \Psi} \Phi^2 dS \\ &= \frac{1}{2} p^2 \int \dots \int e^{q \cdot \Psi} \frac{1}{2} \sum_k^N \sum_i^N \left( \frac{1}{q_{ki}} \right)^2 f_{ki} \\ &\quad \cdot \frac{1}{2} \sum_{k'}^N \sum_{i'}^N \left( \frac{1}{q_{k'i'}} \right)^2 f_{k'i'} dS, \end{aligned} \right.$$

wo

$$(55) \left\{ \begin{aligned} f_{ki} f_{k'i'} &= (m_k, m_i) (m_{k'}, m_{i'}) \\ &\quad - 3 (m_k, m_i) \left( m_{k'}, \frac{r_{k'i'}}{r_{k'i'}} \right) \left( m_{i'}, \frac{r_{k'i'}}{r_{k'i'}} \right) \\ &\quad - 3 (m_{k'}, m_{i'}) \left( m_k, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \left( m_i, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \\ &\quad - 9 \left( m_k, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \left( m_i, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \left( m_{k'}, \frac{r_{k'i'}}{r_{k'i'}} \right) \left( m_{i'}, \frac{r_{k'i'}}{r_{k'i'}} \right). \end{aligned} \right.$$

Die Auswertung vom Ausdruck (54) ist so zu verstehen: Entwickelt man die vierfache Summe in (54), so bekommt man eine Reihe von Gliedern, die den folgenden Kombinationen entsprechen:

- (56)  $\left\{ \begin{array}{l} 1. k, i, k' \text{ und } i' \text{ alle verschieden.} \\ 2. 2 \text{ Indizes sind gleich, und 2 sind verschieden.} \\ 3. 2 \text{ und 2 Indizes paarweise gleich.} \end{array} \right.$

Das allgemeine Glied in der Summe (54), daß die Kombination 1. entspricht, und welches wir mit  $P$  bezeichnen wollen, kann man so schreiben:

$$(57) \left\{ \begin{array}{l} P = \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 \left( \frac{1}{\varrho_{k'i'}} \right)^3 \int \dots \int e^{q\psi} \left\{ (m_k, m_i) - 3 \left( m_k, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \left( m_i, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \right\} \\ \quad \cdot \left\{ (m_{k'}, m_{i'}) - 3 \left( m_{k'}, \frac{r_{k'i'}}{r_{k'i'}} \right) \left( m_{i'}, \frac{r_{k'i'}}{r_{k'i'}} \right) \right\} dS \\ \text{und entsprechend für die Kombinationen 2. und 3.} \\ Q = \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 \left( \frac{1}{\varrho_{k'i'}} \right)^3 \int \dots \int e^{q\psi} \left\{ (m_k, m_i) - 3 \left( m_k, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \left( m_i, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \right\} \\ \quad \cdot \left\{ (m_k, m_{i'}) - 3 \left( m_k, \frac{r_{ki'}}{r_{ki'}} \right) \left( m_{i'}, \frac{r_{ki'}}{r_{ki'}} \right) \right\} dS, \\ R = \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \int \dots \int e^{q\psi} \left\{ (m_k, m_i) - 3 \left( m_k, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \left( m_i, \frac{r_{ki}}{r_{ki}} \right) \right\}^2 dS. \end{array} \right.$$

Bei der Mittelwertbildung sind die Größen  $\varrho_{ki}$ ,  $\varrho_{k'i'}$  usw. als Konstanten zu betrachten. Man darf sie daher vor die einzelnen Integrationszeichen setzen. Da alle Glieder derselben Kombination ganz ähnlich gebaut sind, sind sie alle leicht hinzuschreiben, wenn  $P$ ,  $Q$  und  $R$  ausgewertet sind.

Bevor wir die Summation ausführen können, müssen wir erst die Mittelwerte (57) berechnen.

Multipliziert man die eckigen Klammern in den Ausdrücken (57) aus, bekommt man insgesamt 11 Mittelwerte auszuwerten. Die Integrale, die wir hier zu berechnen haben, sind ganz analog denjenigen, die wir früher für die erste Näherung berechnet haben, nur wird die Rechnung für die zweite Näherung bedeutend komplizierter.

Die notwendigen Substitutionen bei der Auswertung der Integrale bekommt man leicht aus den sphärischen Dreiecken, die auf der Einheitskugel entstehen, wenn die Vektoren  $m_k$ ,



$m_{k'}$ ,  $m_i$ ,  $m_{i'}$ ,  $\Phi$ ,  $r_{ki}/r_{ki}$  und  $r_{k'i'}/r_{k'i'}$  vom Zentrum derselben abgetragen werden.

Die Resultate der Mittelwerthsbildung werden weiter unten mitgeteilt.<sup>1)</sup>

Es ergibt sich:

$$(57') \left\{ \begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\varrho_{ki}}\right)^3 \left(\frac{1}{\varrho_{k'i'}}\right)^3 \mu^4 y_0^{N-4} y_1^4 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) (1 - 3 \cos^2 \delta_{k'i'}), \\ Q &= \left(\frac{1}{\varrho_{ki}}\right)^3 \left(\frac{1}{\varrho_{k'i'}}\right)^3 \mu^4 y_0^{N-3} y_1^2 \{ y_2 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) (1 - 3 \cos^2 \delta_{k'i'}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (y_0 - y_2) \cos \delta_{ki} \cos \delta_{k'i'} (\cos \psi_{ki} \cos \psi_{k'i'} \\ &\quad \quad \quad + \cos \chi_{ki} \cos \chi_{k'i'}) \}, \\ R &= \left(\frac{1}{\varrho_{ki}}\right)^6 \mu^4 y_0^{N-2} \{ y_2^2 + \frac{1}{2} (y_0 - y_2)^2 - 6 [y_2^2 \cos^2 \delta_{ki} \\ &\quad + \frac{1}{4} (y_0 - y_2)^2 \sin^2 \delta_{ki}] + 9 [y_2^2 \cos^4 \delta_{ki} \\ &\quad + y_2 (y_0 - y_2) \sin^2 \delta_{ki} \cos^2 \delta_{ki} + \frac{1}{4} (y_0 - y_2)^2 \sin^4 \delta_{ki}] \}. \end{aligned} \right.$$

Die Richtung der Verbindungslinie zwischen dem  $k^{\text{ten}}$  und  $i^{\text{ten}}$  Elementarmagneten ( $r_{ki}$ ) ist im Koordinatensystem  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  durch die Winkel  $\delta_{ki}$ ,  $\psi_{ki}$ ,  $\chi_{ki}$  bestimmt.

Wir wollen in die Ausdrücke (57') folgende Abkürzungen einführen:

$$(58) \left\{ \begin{aligned} \alpha_{ki, k'i'} &= y_0^{N-4} y_1^4 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) (1 - 3 \cos^2 \delta_{k'i'}), \\ \beta_{ki, k'i'} &= y_0^{N-3} y_1^2 [y_2 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) (1 - 3 \cos^2 \delta_{k'i'}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (y_0 - y_2) \cos \delta_{ki} \cos \delta_{k'i'} (\cos \psi_{ki} \cos \psi_{k'i'} \\ &\quad \quad \quad + \cos \chi_{ki} \cos \chi_{k'i'})], \\ \varepsilon_{ki} &= y_0^{N-2} \left[ \frac{5}{4} y_0^2 - \frac{5}{2} y_0 y_2 + \frac{9}{4} y_2^2 + (-3 y_0^2 \right. \\ &\quad \quad \quad + 15 y_0 y_2 - 18 y_2^2) \cos^2 \delta_{ki} \\ &\quad \quad \quad \left. + \left( \frac{9}{4} y_0^2 - \frac{27}{2} y_0 y_2 + \frac{81}{4} y_2^2 \right) \cos^4 \delta_{ki} \right]. \end{aligned} \right.$$

Die Ausdrücke (57') kann man dann folgendermaßen vereinfacht so schreiben:

$$(57'') \left\{ \begin{aligned} P &= \mu^4 \left(\frac{1}{\varrho_{ki}}\right)^3 \left(\frac{1}{\varrho_{k'i'}}\right)^3 \alpha_{ki, k'i'}, \\ Q &= \mu^4 \left(\frac{1}{\varrho_{ki}}\right)^3 \left(\frac{1}{\varrho_{k'i'}}\right)^3 \beta_{ki, k'i'}, \\ R &= \mu^4 \left(\frac{1}{\varrho_{ki}}\right)^6 \varepsilon_{ki}. \end{aligned} \right.$$

1) Die Bedeutung von  $y_0$ ,  $y_1$  usw. vgl. die Ausdrücke (15).

Nachdem die Mittelwertbildung jetzt erledigt ist, bleibt noch übrig, den Ausdruck (54) zu summieren.

Da die Mittelwerte  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\varepsilon$  (58) nicht alle gleich sind, ist es nicht möglich, den Ausdruck (54) als eine einzige vierfache Summe auszuwerten. Wir müssen anders verfahren.

Ersetzen wir den Ausdruck (54) mit der Summe

$$\frac{1}{8} p^2 \mu^4 \sum_k^N \sum_i^N \sum_{k'}^N \sum_{i'}^N \left( \frac{1}{q_{ki}} \right)^2 \left( \frac{1}{q_{k'i'}} \right)^2 \alpha_{ki, k' i'},$$

so enthält diese Summe auch alle Glieder der Kombinationen 2. und 3. (vgl. (56)). Diese Glieder müssen wir daher nachher von der vierfachen Summe subtrahieren. Wie wir später sehen werden, kann man diese Glieder durch eine dreifache und eine zweifache Summe ersetzen. Um diejenigen Glieder in (54), die der Kombination 2. entsprechen, zu berücksichtigen, müssen wir weiter eine dreifache Summe, deren Glieder mit  $\beta_{ki, k' i'}$  multipliziert sind, addieren. Da aber diese Summe alle Glieder der Kombination 3. enthält, müssen wir weiter so verfahren wie früher: Wir subtrahieren von der letzten dreifachen Summe eine zweifache Summe, deren Glieder mit  $\beta_{ki, k i}$  multipliziert sind. Endlich müssen durch eine zweifache Summe diejenigen Glieder in (54), die der Kombination 3. entsprechen, berücksichtigt werden.

Wenn wir (57'') und die folgenden Relationen, welche leicht deduzierbar sind:

$$(59) \left\{ \begin{aligned} \sum_k^N \sum_i^N \sum_{k'}^N \sum_{i'}^N e_{ki}^3 e_{k'i'}^3 &= 4 \left\{ \sum_k^N \sum_i^N \sum_{i'}^N e_{ki}^3 \cdot e_{k'i'}^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_k^N \sum_i^N e_{ki}^6 + 2 [e_{12}^3 e_{34}^3 + e_{13}^3 e_{24}^3 + \dots \text{(alle} \right. \\ &\quad \left. \text{Glieder der Kombination } k \neq i \neq k' \neq i')] \right\}, \\ \sum_k^N \sum_i^N \sum_{i'}^N e_{ki}^3 e_{k'i'}^3 &= \sum_k^N \sum_i^N e_{ki}^6 + 2 [e_{12}^3 e_{13}^3 + e_{12}^3 e_{14}^3 \\ &\quad + \dots \text{(alle Glieder der Kombination } k = k', i \neq i')] , \\ \sum_k^N \sum_i^N e_{ki}^6 &= 2 [e_{12}^6 + e_{13}^6 + \dots \text{(alle Glieder der Kombi-} \\ &\quad \text{nation } k = k', i = i')] \end{aligned} \right.$$

berücksichtigen, kann der Ausdruck (54) so geschrieben werden:

$$(60) \left\{ \begin{aligned} D_2' &= \frac{1}{8} p^2 \mu^4 \left[ \sum_k^N \sum_i^N \sum_{k'}^N \sum_{i'}^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 \left( \frac{1}{\varrho_{k'i'}} \right)^3 \alpha_{ki, k'i'} \right. \\ &\quad - 4 \left\{ \sum_k^N \sum_i^N \sum_{i'}^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 \left( \frac{1}{\varrho_{k'i'}} \right)^3 \alpha_{ki, k'i'} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_k^N \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \alpha_{ki, ki} \right\} \\ &\quad + 4 \sum_k^N \sum_i^N \sum_{i'}^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 \left( \frac{1}{\varrho_{k'i'}} \right)^3 \beta_{ki, ki'} \\ &\quad \left. - 4 \sum_k^N \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \beta_{ki, ki} + 2 \sum_k^N \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \epsilon_{ki} \right]. \end{aligned} \right.$$

Die Aufgabe läuft also nach (60) darauf hinaus, vier-, drei- und zweifache Summen auszuwerten.

Wenn man die Ausdrücke (58) berücksichtigt, kann man die vierfache Summe so schreiben:

$$\begin{aligned} \sum_k^N \sum_i^N \sum_{k'}^N \sum_{i'}^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 \left( \frac{1}{\varrho_{k'i'}} \right)^3 \alpha_{ki, k'i'} &= y_0^{N-4} y_1^4 \sum_k^N \sum_i^N \sum_{k'}^N \sum_{i'}^N \\ &\quad \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 \left( \frac{1}{\varrho_{k'i'}} \right)^3 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) (1 - 3 \cos^2 \delta_{k'i'}) \\ &= y_0^{N-4} y_1^4 \left\{ \sum_k^N \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) \right\}^2 \\ &= y_0^{N-4} y_1^4 \left\{ N \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) \right\}^2. \end{aligned}$$

Da die eckige Klammer nach (51) und (52) den Wert Null hat, fällt die vierfache Summe weg.

Die erste dreifache Summe kann so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sum_k^N \sum_i^N \sum_{i'}^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 \left( \frac{1}{\varrho_{k'i'}} \right)^3 \alpha_{ki, ki'} &= y_0^{N-4} y_1^4 \sum_k^N \sum_i^N \sum_{i'}^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 \left( \frac{1}{\varrho_{k'i'}} \right)^3 \\ &\quad \cdot (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) (1 - 3 \cos^2 \delta_{k'i'}) \\ &= y_0^{N-4} y_1^4 \sum_k^N \left[ \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) \sum_{i'}^N \left( \frac{1}{\varrho_{k'i'}} \right)^3 (1 - 3 \cos^2 \delta_{k'i'}) \right] \\ &= y_0^{N-4} y_1^4 N \left[ \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^3 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki}) \right]^2 = 0, \end{aligned}$$

weil die Summe, die in der eckigen Klammer steht, Null ist.

In ähnlicher Weise kann man zeigen, daß auch die zweite dreifache Summe in (60) Null ist.

Es bleibt dann übrig, die drei zweifachen Summen in (60) zu berechnen.

Die erste von diesen Summen kann man nach (58) so schreiben:

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_k^N \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \alpha_{ki} &= y_0^{N-4} y_1^4 \sum_k^N \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki})^2 \\ &= y_0^{N-4} y_1^4 N \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki})^2. \end{aligned} \right.$$

Ganz in entsprechender Weise kann man die nächste zweifache Summe in (60) unter Berücksichtigung von (58) so schreiben:

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_k^N \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \beta_{ki} &= y_0^{N-3} y_1^3 N \left[ y_2 \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 (1 - 3 \cos^2 \delta_{ki})^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (y_0 - y_2) \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \cos^2 \delta_{ki} (1 - \cos^2 \delta_{ki}) \right]. \end{aligned} \right.$$

Die dritte zweifache Summe in (60) schreiben wir vorläufig so auf:

$$(63) \quad \sum_k^N \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \varepsilon_{ki} = N \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \varepsilon_{ki}.$$

Was die Auswertung der verschiedenen Summen in (60) betrifft, kann man das Resultat so zusammenfassen: die vier- und dreifachen Summen bekommen alle den Wert Null. Die zweifachen Summen haben wir so entwickelt, daß sie leicht numerisch auswertbar sind.

Der Ausdruck (60) und dadurch auch das Zustandsintegral ist jetzt auswertbar.

Aus den Ausdrücken (12), (13a), (14) und (60) bis (63) folgt, wenn man berücksichtigt, daß (vgl. (51) und (52)):

$$\begin{aligned} \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \cos^2 \delta_{ki} &= \frac{1}{3} \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6, \\ J &= y_0^N \left[ 1 + \frac{1}{4} p^2 \mu^4 N \left\{ - \frac{y_1^2 (2 y_2 y_0 - y_1^2)}{y_0^4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left[ - \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 + 9 \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \cos^4 \delta_{ki} \right] - \frac{y_1^2 (y_0 - y_2)}{y_0^3} \right. \\ &\quad \left. \left[ \frac{1}{3} \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 - \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \cos^4 \delta_{ki} \right] + \left[ \frac{1}{4} + \frac{5}{2} \frac{y_2}{y_0} - \frac{15}{4} \left( \frac{y_2}{y_0} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 + \left[ \frac{9}{4} - \frac{27}{2} \frac{y_2}{y_0} + \frac{81}{4} \left( \frac{y_2}{y_0} \right)^2 \right] \sum_i^N \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \cos^4 \delta_{ki} \right\} \right] \end{aligned}$$

und

$$\log J = N \log y_0 + \frac{1}{4} p^2 \mu^4 N \{ \quad \}.$$

Das mittlere Moment eines Elementarmagneten im Verhältnis zur absoluten Größe desselben ist dann:

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{M_T}{N\mu} &= \frac{1}{N} \frac{d}{dy} \log J = \frac{y_1}{y_0} \left[ 1 + \frac{1}{4} p^2 \mu^4 \right. \\ &\quad \left\{ -2a_0 \left[ \frac{2y_0 y_2^2 + y_0 y_1 y_3 - 5y_1^2 y_2}{y_0^3} + 2 \left( \frac{y_1}{y_0} \right)^4 \right] \right. \\ &\quad - a_1 \frac{2y_0 y_2 (y_0 - y_2) + y_1 (3y_1 y_2 - 2y_0 y_1 - y_0 y_3)}{y_0^3} \\ &\quad \left. \left. + \frac{(a_2 y_0 + 2a_3 y_2) (y_0 y_2 - y_1 y_3)}{y_0^2 y_1} \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist:

$$(64') \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= - \sum_i^N i \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 + 9 \sum_i^N i \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \cos^4 \delta_{ki}, \\ a_1 &= + \frac{1}{3} \sum_i^N i \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 - \sum_i^N i \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \cos^4 \delta_{ki}, \\ a_2 &= + \frac{5}{2} \sum_i^N i \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 - \frac{27}{2} \sum_i^N i \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \cos^4 \delta_{ki}, \\ a_3 &= - \frac{15}{4} \sum_i^N i \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 + \frac{81}{4} \sum_i^N i \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \cos^4 \delta_{ki}. \end{aligned} \right.$$

## § 12. Das kubische und zentriert-kubische Raumgitter.

Um das Resultat (64) auswerten zu können, müssen die Konstanten  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  berechnet werden.

Die Rechnung ist für das kubische System und das zentriert-kubische System durchgeführt. Das letztere wurde neben dem rein kubischen auch berücksichtigt, weil die Röntgenanalyse gezeigt hat, daß das Eisen in diesem System kristallisiert.

Die Summationen der Ausdrücke (64') sind für zwei Kuben des Raumgitters ausgeführt und die Beiträge (die übrigens relativ klein sind), die die übrigen Elementarmagneten zu den respektiven Summen liefern, sind durch Integrale in Rechnung getragen.

Die in dieser Weise berechneten Konstanten

$$\sum_i^N i \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \quad \text{und} \quad \sum_i^N i \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \cos^4 \delta_{ki}$$

mögen hier für die zwei Kristallsysteme angegeben werden:

## 1. Das kubische System.

$$\sum_1^N i \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 = 8,36 \quad \text{und} \quad \sum_1^N i \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \cos^4 \delta_{ki} = 2,45.$$

Nach (64') wird dann:

$$a_0 = 13,66, \quad a_1 = 0,34, \quad a_2 = -12,3, \quad a_3 = 18,2.$$

## 2. Das zentriert-kubische System:

$$\sum_1^N i \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 = 28,84 \quad \text{und} \quad \sum_1^N i \left( \frac{1}{\varrho_{ki}} \right)^6 \cos^4 \delta_{ki} = 4,92.$$

Nach (64') wird:

$$a_0 = 15,39, \quad a_1 = 4,69, \quad a_2 = 5,6, \quad a_3 = -8,5.$$

Da der Ausdruck (64) ziemlich kompliziert und wenig übersichtlich ist, wollen wir denselben nach Potenzen von  $q$  ( $= \mu H / k T$ ) entwickeln und mit Gliedern in  $q^2$  abbrechen.

Da wir früher das Zustandsintegral  $J$ , auf welches die ganze Entwicklung sich stützte, nach der Reihenentwicklung (12) nur nach Potenzen von  $p \Phi$ , das will nach (8) heißen, nach Potenzen von  $\mu^2 / a^3 k T$ , entwickelt haben, gelten die bisherigen Entwicklungen für hohe Temperaturen aber für beliebige Feldstärken.

Für das kubische Raumgitter bekommt man:

$$(65) \quad \left\{ \frac{M_T}{N\mu} = \frac{1}{3} \frac{\mu H}{k T} \left[ \left\{ 1 - \frac{6,27}{4} \left( \frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 + \dots \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{\mu H}{k T} \right)^2 \left\{ \frac{2,56}{4} \left( \frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 - \frac{1}{15} \right\} \right] \right\}$$

und entsprechend für das zentriert-kubische Raumgitter:

$$(66) \quad \left\{ \frac{M_T}{N\mu} = \frac{1}{3} \frac{\mu H}{k T} \left[ \left\{ 1 - \frac{8,88}{4} \left( \frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 + \dots \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{\mu H}{k T} \right)^2 \left\{ \frac{3,22}{4} \left( \frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 - \frac{1}{15} \right\} \right] \right\}.$$

Aus den Ausdrücken (65) und (66) geht hervor, daß die Zahlenfaktoren in den zwei Fällen von derselben Größenordnung sind. Es zeigt sich also, daß die verschiedenen Anordnungen der Atome im Raumgitter in den zwei Fällen keine bedeutende Rolle spielen. Es genügt deshalb, in den weiteren Ausführungen nur den ersten dieser Ausdrücke näher zu betrachten.

Lassen wir erstens die Wechselwirkung außer Betracht, und betrachten wir den Fall, daß das äußere Feld  $H$  relativ klein ist, so bekommt man für die Magnetisierung aus den Ausdrücken (65) und (66) den bekannten Langevinschen Ausdruck für kleine Felder:

$$\frac{M_T}{N\mu} = \frac{1}{3} \frac{\mu H}{k T}.$$

Die Magnetisierungskurve stellt eine gerade Linie, die durch den Nullpunkt des Koordinatensystems  $M, H$  geht, dar. Die Anfangspermeabilität des Körpers

$$(67) \quad \frac{M_T}{H} = \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{k T} N$$

ist also bei einer bestimmten Temperatur konstant.

Dasselbe ist nach (65) auch der Fall, wenn man die Wechselwirkung berücksichtigt. Nach (65) bekommt man nämlich für die Anfangspermeabilität den Wert:

$$(67') \quad \frac{M_T}{H} = \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{k T} N \left[ 1 - \frac{6,27}{4} \left( \frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 + \dots \right].$$

Die Anfangspermeabilität wird allerdings durch die Wechselwirkung um einen gewissen Betrag verkleinert. Dieser Betrag ist nach (67') der dritten Potenz der Temperatur umgekehrt, der sechsten Potenz des magnetischen Moments eines Elementarmagneten direkt proportional.

Untersuchen wir weiter den Ausdruck (65) für den Fall, daß  $q^2$  in Betracht kommt, d. h. betrachten wir die Magnetisierungskurve für stärkere äußere Felder, ergibt es sich, daß es eine Umkehrtemperatur gibt.

Ist die Temperatur so hoch, daß:

$$\frac{2,56}{4} \left( \frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 - \frac{1}{15} < 0,$$

d. h.

$$T > \frac{\mu^2}{a^3 k} \sqrt{\frac{4}{2,56 \cdot 15}},$$

wird die Magnetisierungskurve immer unterhalb der durch den Ausdruck (67') dargestellten Kurve sich befinden.

Ist aber die Bedingung:

$$\frac{2,56}{4} \left( \frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 - \frac{1}{15} = 0$$

erfüllt, d. h.

$$T = \frac{\mu^2}{a^3 k} \sqrt{\frac{4}{2,56 \cdot 15}},$$

fällt die Magnetisierungskurve (65) mit der Kurve (67') zusammen.

Für

$$T < \frac{\mu^2}{a^3 k} \sqrt{\frac{4}{2,56 \cdot 15}}$$

wird die Magnetisierungskurve für kleinere Felder unterhalb der Langevinschen Kurve, für stärkere Felder oberhalb dieser Kurve liegen. Qualitativ sind diese Resultate in Fig. 4 dargestellt.

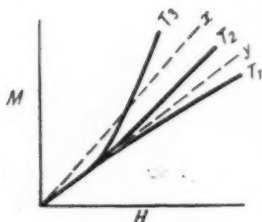


Fig. 4.

Hier sind die durch die Relationen (67) und (67') dargestellten Kurven mit  $x$  und  $y$  angegeben. Die Kurven  $T_1$ ,  $T_2$  usw. geben die Magnetisierungskurven für verschiedene Temperaturen an. ( $T_1 > T_2 > T_3$ ).

Daß die Wechselwirkung quantitativ keine große Rolle spielt, wird sofort klar, wenn man Zahlenwerte in den Ausdruck (65) einsetzt.

Setzt man  $\mu = 1,76 \cdot 10^{-20}$  C.G.S. (das entspricht dem magnetischen Moment eines Elementarmagneten, der aus 11 Magnetonen besteht (vgl. S. 10),  $a = 2,86 \cdot 10^{-8}$  cm<sup>1</sup>) und  $T = 300^\circ$  abs., bekommt man für das Glied im Ausdruck (65), welches der Wechselwirkung Rechnung trägt:

$$\left( \frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 \approx 10^{-7}.$$

Die Wechselwirkung hat also bei hohen Temperaturen einen nicht merkbaren Einfluß auf die Magnetisierungskurve des idealisierten Körpers, den wir betrachtet haben. Die Ursache, weshalb die magnetische Wechselwirkung einen so kleinen Einfluß auf die Magnetisierungskurve ausübt, rührt davon her, daß die magnetischen Momente der Elementarmagnete nicht genügend groß sind.

Wir wollen daher näher den Fall betrachten, daß die Atome sowohl als Elementarmagnete, wie elektrische Dipole

1) Nach Angaben von Hull (Phys. Rev. S. 661. 1917) ist die Gitterkonstante für Eisen gleich  $2,86 \cdot 10^{-8}$  cm.



aufzufassen sind. Obwohl eine solche Annahme für Metalle nicht plausibel ist, kann es jedoch von Interesse sein, sie zu prüfen. Wir wissen nämlich heutzutage, daß elektrische Dipole, in den Fällen, wo sie wirklich nachgewiesen wurden, Momente besitzen, die bedeutend größer sind, als was man für die Elementarmagnete gefunden hat.<sup>1)</sup> Die Momente der Dipole (z. B. in  $\text{SO}_2$ ) sind von der Größenordnung  $10^{-18}$  C.G.S., d. h. etwa 100mal größer als das magnetische Moment eines Elementarmagneten in Eisen.

Besitzen die Atome sowohl magnetische — wie elektrische Momente, so hat man sich den Magnetisierungsprozeß so vorzustellen, daß das äußere Feld magnetisch richtend wirkt, und daß die elektrische Wechselwirkung für die weitere Einstellung in der Richtung des äußeren Feldes wesentlich bestimmend ist.

Die früheren Entwicklungen können wir auch für diesen Zweck anwenden, wenn wir beachten, daß die potentielle Energie des Körpers sowohl von den Elementarmagneten wie von den Dipolen herrührt.

Die wechselseitige elektrische Energie ist jetzt leicht anzugeben. Sie ist durch die Doppelsummen im Ausdruck (45) dargestellt, wenn  $m$  das elektrische Moment eines Dipols bedeutet. (Den Absolutbetrag dieser Größe wollen wir von jetzt an für die Dipole mit  $\mu_e$ , für die Elementarmagnete mit  $\mu_m$  bezeichnen.)

Die potentielle Energie setzt sich also aus zwei Doppelsummen und einer einfachen Summe zusammen. Die eine der zwei Doppelsummen gibt die magnetische, die andere die elektrische wechselseitige Energie an. Die einfache Summe stellt die potentielle Energie des Körpers in bezug auf das äußere Feld dar. Da aber das magnetische Moment viel kleiner ist als das elektrische Moment, dürfen wir in erster Näherung die erste Doppelsumme fortlassen. In der Doppelsumme in (45) bedeutet daher von jetzt an  $m$  das elektrische Moment eines Dipols.

Verfolgen wir unsere weiteren Entwicklungen, indem wir diese Veränderung berücksichtigen, haben wir im Endresultat (65) und (66) nur kleine Änderungen vorzunehmen.

1) P. Debye, *Physik. Zeitschr.* 13. S. 97. 1912; Jona, *Physik. Zeitschr.* 20. S. 14. 1919.

Statt den Ausdruck (65) bekommen wir:

$$(68) \quad \left\{ \frac{M_T}{N\mu} = \frac{1}{3} \frac{\mu_m H}{kT} \left[ \left\{ 1 - \frac{6,27}{4} \left( \frac{\mu_e}{a^3 kT} \right)^2 + \dots \right\} + \left( \frac{\mu_m H}{kT} \right)^2 \left\{ \frac{2,56}{4} \left( \frac{\mu_e^3}{a^3 kT} \right)^2 - \frac{1}{15} \right\} + \dots \right] \right\}.$$

Will man dieses Resultat numerisch auswerten, muß man sich vergegenwärtigen, welche Voraussetzungen bei der Ableitung desselben gemacht worden sind.

Um die Integration des Zustandsintegrals (10), auf welche alle weiteren Entwicklungen sich gründen, ausführen zu können, haben wir in (12) nach Potenzen von  $p\Phi$ , d. h. nach Potenzen von  $\mu^2/a^3 kT$  entwickelt. Das Resultat ist deshalb nur unter der Voraussetzung brauchbar, daß:

$$\frac{\mu_e^2}{a^3 kT} \ll 1$$

ist, d. h. wir müssen für einen gegebenen Wert von  $\mu_e$ ,  $T$  so hoch wählen, daß die Bedingung erfüllt ist.

Setzt man  $\mu_e = 10^{-18}$ ,  $a = 3 \cdot 10^{-8}$ ,  $k = 10^{-16}$ ,  $T = 900^\circ$ , berechnet sich:

$$\frac{\mu_e^2}{a^3 kT} \approx 1,$$

d. h. wir müssen bei der Auswertung eine noch höhere Temperatur wählen, um den Ausdruck (68) benützen zu können. Man sieht in diesem Falle allerdings, daß die Wechselwirkung eine viel größere Rolle als früher spielt. Hätte man die Berechnung des Zustandsintegrals (10) ohne Reihenentwicklung nach Potenzen von  $p\Phi$  ausführen können, wäre es auch möglich gewesen, die Magnetisierungskurve auch für niedrigere Temperaturen unter den neuen Voraussetzungen numerisch zu berechnen. Die Frage, ob eine solche Berechnung den Ferromagnetismus erklären könnte, müssen wir hier offen lassen.

#### Zusammenfassung.

1. Die Berechnung ist für das eindimensionale Problem und für das kubische Raumgitter durchgeführt.

Bei dem eindimensionalen Problem ist die Magnetisierungskurve unter Berücksichtigung der Wechselwirkung sowohl für tiefe wie hohe Temperaturen berechnet.

2. Die Magnetisierungskurve für Temperaturen in der Nähe des absoluten Nullpunkts zeigt einen plötzlichen Auf-

stieg für schwache Felder (vgl. Fig. 3 S. 19), der den Ferromagnetismus kennzeichnet. Für extrem hohe Felder strebt die Magnetisierungskurve einem Maximum zu. Dieses Maximum ist nach der Langevinschen Theorie auch für paramagnetische Körper charakteristisch. Bei hohen Temperaturen wird die Langevinsche Kurve nur wenig beeinflusst (Fig. 2).

3. Die erweiterte Langevinsche Theorie zeigt, daß die molekulare Größe  $\beta$  (S. 13), die in dieser Theorie die entsprechende Bedeutung hat, wie die Größe  $N$ , in der Weiss'schen Hypothese des molekularen Feldes, eine Temperaturfunktion ist.

4. Für das kubische und zentriert-kubische Raumgitter ist die Berechnung der Magnetisierungskurve nur für höhere Temperaturen durchgeführt.

Es zeigt sich, daß die Magnetisierungskurve in diesem Falle noch weniger beeinflusst wird als bei dem eindimensionalen Falle.

5. Zuletzt ist auch die Annahme geprüft worden, daß die Atome des Raumgitters außer Elementarmagneten auch elektrische Dipole enthalten. Es zeigt sich, daß das Glied, welches der Wechselwirkung Rechnung trägt, unter diesen Voraussetzungen bedeutend größer wird als früher. Die beschränkenden Bedingungen aber, daß die Ausdrücke in Reihen entwickelbar sind, gestatten jedoch nicht, die Magnetisierungskurve unter der Voraussetzung der Dipole bei gewöhnlicher Temperatur quantitativ zu verfolgen.

Diese Arbeit wurde voriges Jahr in Göttingen angefangen und hier in Zürich dieses Jahr abgeschlossen.

Ich erlaube mir, Hrn. Prof. Dr. Debye für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für das fördernde Interesse, das er derselben immer entgegenbrachte, meinen allerbesten Dank auszusprechen.

Zürich, den 17. Juli 1920.

Physikalisches Institut der Eidgen. Techn. Hochschule.

(Eingegangen 10. August 1920.)

## 2. Über den Starkeffekt zweiter Ordnung; von A. Sommerfeld.

Die Herren Takamine und Kokubu haben in einer Untersuchung<sup>1)</sup>, die 1919 im Mt. Wilson-Observatorium ausgeführt wurde, gefunden, daß im Starkeffekt der Wasserstofflinie  $H_\gamma$  bei sehr hohen elektrischen Feldern die Mittelkomponente ( $s$ -Komponente) um etwa eine Å.-Einheit nach der langwelligen Seite umbogener erscheint, wenn die Anordnung nach Lo Surdo getroffen wird.

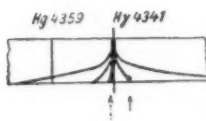


Fig. 1.

Die nebenstehende Skizze zeigt schematisch das Verhalten der  $s$ -Komponenten, nämlich der starken Mittelkomponente und der zwei nächststarken Seitenkomponenten, sowie die feldlose, über den Starkeffekt nachträglich herüber

photographierte unzerlegte Linie  $H_\gamma$ . Zur Beurteilung des Maßstabes ist auch eine Hg-Linie aufgenommen. Die charakteristische Umbiegung ist bei der Mittelkomponente durch einen Pfeil hervorgehoben. Ein kürzerer Pfeil macht auf das analoge Verhalten (s. u.) der nächsten Seitenkomponente rechts aufmerksam. Die Feldstärken wachsen von oben nach unten.

Ich möchte darauf hinweisen, daß diese Erscheinung allgemein bereits von Epstein<sup>2)</sup> vorhergesagt ist. Er berechnet neben dem Glied erster Ordnung in der Feldstärke

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta_1 \nu = \frac{3h}{8\pi^2 m_0 E} (Z_1(n) - Z_1(m)) F \\ Z_1(n) = (n_2 - n_1)(n_1 + n_2 + n_3), \end{cases}$$

1) The Effekt of an Electric Field on the Spectrum Lines of Hydrogen, Part III, Memoirs of the College of Science, Kyoto Imperial University, Vol III. 1919. p. 271.

2) P. Epstein, Zur Quantentheorie, Ann. d. Phys. 51. S. 184. 1916.

das Glied zweiter Ordnung (nach der Methode der komplexen Integration von mir bestätigt):

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta_2 \nu = \frac{17}{16} \frac{h^6}{(2\pi)^6 e^2 E^4 m_0^3} (Z_2(n) - Z_2(m)) F^2 \\ Z_2(n) = (n_1 + n_2 + n_3)^6 \left\{ 1 - \frac{3}{17} \left( \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2 + n_3} \right)^2 \right. \\ \quad \left. - \frac{9}{17} \left( \frac{n_3}{n_1 + n_2 + n_3} \right)^2 \right\}. \end{cases}$$

Hier bedeutet  $F$  die Feldstärke,  $E$  die Kernladung (bei Wasserstoff  $E = e$ ),  $n_1, n_2, n_3$  die Quantenzahlen der Endbahn, und zwar  $n_3$  die „azimutale“,  $n_2, n_1$  die „parabolischen“ Quantenzahlen. Entsprechend sind die Quantenzahlen der Anfangsbahn mit  $m_3, m_2, m_1$  bezeichnet.  $m_0$  meint die Ruhmasse des Elektrons.

Die unverschobene Mittelkomponente ( $s$ -Komponente) von  $H_\gamma$  entsteht<sup>1)</sup> durch die beiden Übergänge ( $m_3 m_2 m_1 \rightarrow n_3 n_2 n_1$ ):  
(311  $\rightarrow$  200) und (122  $\rightarrow$  200).

Für diese Übergänge ist  $Z_1(n) = Z_2(m) = 0$ , was nichts anderes besagt, als daß der Starkeffekt erster Ordnung  $\Delta_1 \nu$  verschwindet. Andererseits ist  $Z_2(n) - Z_2(m)$  für die genannten Übergänge gleich

$$2^6 \left( 1 - \frac{9}{17} \right) - 5^6 \left( 1 - \frac{9}{17} \frac{9}{25} \right) = -1,3 \cdot 10^4$$

bzw.

$$2^6 \left( 1 - \frac{9}{17} \right) - 5^6 \left( 1 - \frac{9}{17} \frac{1}{25} \right) = -1,5 \cdot 10^4.$$

Daraus folgt für den Starkeffekt zweiter Ordnung  $\Delta_2 \nu$  bzw. die ihm entsprechende Wellenlängendifferenz  $\Delta \lambda$  im Durchschnitt für beide Entstehungsarten mit dem schon von Epstein angegebenen Zahlenfaktor  $8,72 \cdot 10^{-15}$

$$\Delta \lambda = -\frac{1}{c} \Delta_2 \nu \lambda^2 = + 8,72 \cdot 10^{-15} \cdot 1,4 \cdot 10^4 \lambda^2 F^2.$$

Dies ergibt mit  $\lambda = 4,3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$  und dem von den Hn. Takamine und Kokubu geschätzten Felde  $F = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Volt/cm}$ :

$$(3) \quad \Delta \lambda = 4 \cdot 10^{-9} \text{ cm} = 0,4 \text{ \AA}.$$

1) Vgl. die Tabellen von Kramers, Diss., Kopenhagener Akademie 1919. S. 340.

Dieser Wert ist also merklich kleiner als der eingangs mitgeteilte Wert  $\Delta\lambda = 1 \text{ \AA}$ .

Mit demselben Werte der Feldstärke würde sich als Stark-effekt erster Ordnung für die nächste, in unserer Skizze ebenfalls gezeichnete  $s$ -Komponente, welche dem Übergange  $(212 \rightarrow 101)$  entspricht, nach Gl. (1) ergeben  $\Delta\lambda = 4,6 \text{ \AA}$ , während die Aufnahme, im Mittel für die rechte und linke Komponente, eine Verschiebung  $\Delta\lambda = 5,2 \text{ \AA}$  zeigt. Indem man nach dem Vorgange von Stark<sup>1)</sup> umgekehrt aus der Verschiebung die Feldstärke entnimmt (das Korrektionsglied zweiter Ordnung ist hier durch die Mittelbildung zwischen rechts und links eliminiert), hat man die von dem Verf. geschätzte Feldstärke von 130000 Volt/cm im Verhältnis 5,2:4,6 zu vergrößern und erhält somit für den Effekt zweiter Ordnung bei der Mittelkomponente statt (3)

$$(4) \quad \Delta\lambda = 0,4 \cdot \left(\frac{5,2}{4,6}\right)^2 = 0,5 \text{ \AA}.$$

Auf meine Anfrage hin teilte mir Herr Takamine freundlichst mit, daß die Angabe  $1 \text{ \AA}$  für die Verschiebung der Mittelkomponente möglicherweise fehlerhaft sein könne, und daß sie nur 0,8 A. oder 0,7 A. betragen möge. Wie die hier- nach noch verbleibende Differenz zwischen unserem theoretischen Wert (4) und der Beobachtung zu erklären ist, kann zurzeit nicht entschieden werden.

Dieselbe Erscheinung, Abbiegung der Mittelkomponente nach größeren Wellenlängen, ist von den Verf. auch bei  $H_e$  bemerkt worden. In der Tat zeigt Gl. (2), daß bei allen Wasserstofflinien, welche im Starkeffekt eine unverschobene Mittelkomponente besitzen (es sind dies die Linien ungerader Seriennummer  $H_\alpha, H_\gamma, H_\epsilon, \dots$ ), eine Umbiegung der Mittelkomponente nach Rot stattfinden muß, daß sie aber bei  $H_\alpha$  unmerklich klein ist ( $0,02 \text{ \AA}$ ) und bei  $H_e$  erheblich (nämlich rund  $(\frac{1}{5})^6 = 7,5$  mal) größer als bei  $H_\gamma$  wird.

Ferner haben die Verf. gefunden, daß die He-Linien 4026 und 4388 (I. N.-S. von Orthohelium und Parhelium), welche ebenso wie  $H_\gamma$  zum Übergange  $5d \rightarrow 2p$  gehören, dieselbe Erscheinung zeigen; die Verf. vermuten dementsprechend, daß

1) J. Stark, Elektrische Spektralanalyse § 16. S. 53.

allgemein die Umbiegung der Mittelkomponente bei dem Seriangliede 5 besonders ausgeprägt sei. Nun beherrschen wir zwar den Starkeffekt der He-Linien zurzeit theoretisch noch nicht; doch ist soviel zu übersehen, daß auch hier die Erscheinung nicht an die Seriennummer 5 gebunden sein kann, sondern daß sie bei Vorhandensein einer Mittelkomponente mit zunehmender Seriennummer immer stärker hervortreten muß.

Natürlich müssen auch die äußeren *s*- und *p*-Komponenten einen Effekt zweiter Ordnung zeigen, welcher theoretisch nach Gl. (2) von der gleichen Größenordnung ist wie bei der Mittelkomponente. In der Tat glaubte ich in der photographischen Reproduktion der Originalaufnahme bei der ersten *s*-Komponente rechts eine Umbiegung zu sehen von der gleichen Art wie bei der Mittelkomponente. Diese ist in unserer Skizze angedeutet und durch den kürzeren Pfeil markiert. Es ist andererseits nach den Krümmungsverhältnissen der Kurve klar, daß dieselbe Erscheinung, nämlich die Abbiegung nach der langwelligen Seite, bei der entsprechenden Komponente links und bei den weiter getrennten *s*- und *p*-Komponenten nicht deutlich wahrgenommen werden kann.

Herr Takamine hat nun freundlichst seine Originalplatte daraufhin geprüft, ob die von mir bemerkte Umbiegung der rechten Seitenkomponente reell sei, und hat sie bestätigt gefunden. Er bestimmte nämlich den Abstand der rechten bzw. linken Seitenkomponente von der ursprünglichen Lage der Linie  $H_{\gamma}$  zu

4,5 Å. bzw. 6,0 Å.

Diese Komponenten liegen also deutlich unsymmetrisch. Das Mittel beider Abstände beträgt 5,2 Å., mit welchem Werte wir oben bei der Ermittlung des Feldes gerechnet haben. Die Verschiebung zweiter Ordnung für beide Komponenten ist 0,7 Å., was mit dem oben zugelassenen kleinsten empirischen Werte für die Verschiebung der Mittelkomponente übereinstimmt. Diese Übereinstimmung ist theoretisch nach Gl. (2) zu erwarten.

Offenbar ist der Einwand möglich, daß die hier und bei der Mittelkomponente beobachtete Rotverschiebung durch einen Dopplereffekt vorgetäuscht sein könnte. Herr Takamine

schreibt mir dazu, daß nach der experimentellen Anordnung der Dopplereffekt schwerlich eine Rolle spielen dürfte. Jedenfalls spricht die merkliche Abwesenheit einer Rotverschiebung bei  $H_{\alpha}$  gegen diesen Einwand.

Alles in allem darf man sagen, daß die Beobachtungen der Hn. Takamine und Kokubu die früheren Rechnungen Epsteins mindestens qualitativ durchaus zu bestätigen scheinen. Sie zeigen von neuem, wie die Quantentheorie den Starkeffekt bis in seine feinsten Einzelheiten wiederzugeben imstande ist.

(Eingegangen 27. Januar 1921.)



### 3. *Ein Sender elektrischer Wellen im Innern einer metallischen Hülle*<sup>1)</sup>; von J. B. Collo.

(Mitgeteilt von R. Gans.)

Da Hr. Loyarte am hiesigen Institut die Dämpfung kurzer Wellen studierte, die von einem im Inneren eines Metallkastens angebrachten Sender ausgehen und durch eine kleine Öffnung ins Freie treten, schlug mir Hr. Prof. Gans vor, das Problem theoretisch zu behandeln.

Wegen seiner Kompliziertheit blieb nichts anderes übrig, als den praktischen Fall wesentlich zu idealisieren, jedoch darf man wohl einige Resultate bedenkenlos verallgemeinern. Die Idealisierung besteht in folgendem.

Der „Sender“ sei ein Planckscher Oszillator der Eigenschwingungszahl  $\nu_0$  und des kleinen logarithmischen Dekrements  $\sigma$ . Er befinde sich im Mittelpunkte einer vollkommen leitenden Kugelhülle des Radius  $a$ .

#### § 1. Die Formulierung des Problems und die Frequenzgleichung.

Es ist von vornherein klar, daß mögliche Schwingungen ungedämpft bestehen können, da aus dem Kugelinnern keine Energie entweichen kann. Wir dürfen also die gesuchten Feldstärken dem Zeitfaktor  $e^{2\pi i \nu t}$  mit reellem  $\nu$  proportional setzen. Dagegen ist nicht ohne weiteres zu übersehen, was für Eigenschwingungszahlen das aus Oszillator und Kugelhülle bestehende System auszusenden vermag. Deshalb wollen wir dieser Aufgabe besonders unser Augenmerk zuwenden.

Wir können das elektromagnetische Feld im Inneren der Hülle als Überlagerung des Dipolfeldes  $\mathfrak{E}_1$ ,  $\mathfrak{H}_1$  und eines

1) Vgl. auch Contribución al estudio des las ciencias. Univ. Nac. de La Plata 2. S. 301. 1918.

Störungsfeldes  $\mathfrak{E}_2$ ,  $\mathfrak{H}_2$  auffassen, welch letzteres durch Reflexion der Wellen an der Kugeloberfläche entsteht.

Das Dipolfeld leitet sich aus einer einzigen Funktion  $F$  ab.<sup>1)</sup>

Danach ist

$$(1) \quad \mathfrak{E}_{1x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x}; \quad \mathfrak{E}_{1y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; \quad \mathfrak{E}_{1z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

wo  $F$  für ungedämpfte Sinuswellen die Form hat

$$(2) \quad F = \frac{1}{r} \left( t - \frac{r}{c} \right) = \frac{C}{r} e^{2\pi i \nu \left( t - \frac{r}{c} \right)}.$$

Dem elektrischen Felde (1) überlagert sich ein Feld

$$(3) \quad \mathfrak{E}_{2x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial x}; \quad \mathfrak{E}_{2y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}; \quad \mathfrak{E}_{2z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

das auch zeitlich durch den Faktor  $e^{2\pi i \nu t}$  charakterisiert ist und sonst, wie wir sehen werden, nur von  $r$  abhängt.

Da  $\Phi$  der Gleichung

$$(4) \quad \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

zu genügen hat, so kann in reeller Form

$$(5) \quad \Phi = A \cos 2\pi \nu t \frac{\sin kr}{kr}$$

mit

$$(6) \quad k = \frac{2\pi \nu}{c}$$

gesetzt werden, denn das andere partikuläre Integral mit dem Faktor  $\frac{\cos kr}{kr}$  widerspräche der Endlichkeitsbedingung des Vektors  $\mathfrak{E}_2$ .

Folgende Grenzbedingungen sind zu erfüllen. Für  $r = a$  muß  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$  senkrecht auf der Kugel stehen, und für  $r = 0$  gilt eine dynamische Beziehung, welche ausdrückt, daß im Kugelmittelpunkt die erregende Kraft  $\mathfrak{E}_2$  gerade die Schwingungen des Dipols aufrecht erhält.

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig 1906. S. 103.

Diese Bedingung ist aber identisch mit der von Planck (a. a. O., S. 113, Gleichung (172)) formulierten. Ist  $\mathfrak{f}$  das Moment des Oszillators, so muß

$$(7) \quad 16\pi^4 \nu_0^3 \mathfrak{f} + 4\pi^2 \nu_0 \mathfrak{f}'' - 2\sigma \mathfrak{f}''' = 3\sigma c^3 \mathfrak{E}_z,$$

sein.

Da  $F$  nur von  $r$  und  $t$  abhängt, so geht (1) über in

$$(8) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_{1x} = z \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{x}{r}, \\ \mathfrak{E}_{1y} = z \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{y}{r}, \\ \mathfrak{E}_{1z} = z \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{z}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \end{cases}$$

$\mathfrak{E}_1$  setzt sich also aus zwei Vektoren zusammen, von denen der eine vom Betrage

$$z \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right)$$

im ganzen betrachteten Raum bereits die für  $r = a$  verlangte Richtung von  $r$  hat, während der andere

$$\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

parallel  $z$  ist. Für  $\mathfrak{E}_2$  gilt ganz Analoges; es ist nur  $F$  durch  $\Phi$  zu ersetzen. Für  $r = a$  muß der Teil des Vektors  $\mathfrak{E}$ , welcher  $z$  parallel ist, verschwinden, d. h. es muß sein für

$$(9) \quad r = a: \quad \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Aus (5) berechnet sich mittels (3) für das Kugelzentrum mittels Entwicklung von  $\frac{\sin kr}{kr}$  nach Potenzen von  $r$

$$(10) \quad \mathfrak{E}_{2z} = \frac{2}{3} k^2 A \cos 2\pi \nu t,$$

und eine solche erregende Kraft gibt nach Planck (a. a. O. S. 114 (174)) als Lösung von (7) das Moment

$$(11) \quad \mathfrak{f}(t) = \frac{A}{k} \sin \gamma \cos(2\pi \nu t - \gamma),$$

wo

$$(12) \quad \text{ctg } \gamma = \frac{\pi \nu_0}{\sigma \nu^3} (\nu_0^2 - \nu^2)$$

ist. Also wird nach (2)

$$(13) \quad F = \frac{A \sin \gamma}{kr} \cos \left[ 2\pi \nu \left( t - \frac{r}{c} \right) - \gamma \right].$$

Somit sind  $\Phi$  und  $F$  gefunden; es ist nur noch  $\nu$  zu bestimmen. Dazu braucht man nur (5) und (13) in (9) einzusetzen, und da diese Bedingung für jede Zeit gelten muß, die Faktoren von  $\cos 2\pi \nu t$  und  $\sin 2\pi \nu t$  einzeln Null zu setzen, so erhält man

$$(14) \quad \begin{cases} \sin \gamma [(1 - \varepsilon^2) \cos (\gamma + \varepsilon) + \varepsilon \sin (\gamma + \varepsilon)] \\ \quad + (1 - \varepsilon^2) \sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon = 0, \\ (1 - \varepsilon^2) \sin (\gamma + \varepsilon) - \varepsilon \cos (\gamma + \varepsilon) = 0, \end{cases}$$

wo  $\varepsilon$  eine Abkürzung für

$$(15) \quad \varepsilon = k a = \frac{2\pi \nu a}{c}$$

ist. Führt man die Bezeichnungen

$$(16) \quad \begin{cases} \varphi(\varepsilon) = \varepsilon \cos \varepsilon - (1 - \varepsilon^2) \sin \varepsilon, \\ \psi(\varepsilon) = \varepsilon \sin \varepsilon + (1 - \varepsilon^2) \cos \varepsilon, \end{cases}$$

so gehen beide Gleichungen (14) in die eine

$$(17) \quad \psi \sin \gamma - \varphi \cos \gamma = 0, \quad \text{d. h.} \quad \text{ctg } \gamma = \frac{\psi}{\varphi}$$

über, und setzt man schließlich

$$(18) \quad P(\varepsilon) = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\varepsilon \sin \varepsilon + (1 - \varepsilon^2) \cos \varepsilon}{\varepsilon \cos \varepsilon - (1 - \varepsilon^2) \sin \varepsilon}$$

und führt die Bezeichnung ein

$$(19) \quad \varepsilon_0 = \frac{2\pi \nu_0 a}{c},$$

so folgt aus (12), (17) und (18)

$$(20) \quad P(\varepsilon) = \frac{\pi}{\sigma} \frac{1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2}}{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^3}.$$

Diese transzendente Gleichung ist die Frequenzgleichung. Aus ihr sind bei gegebenem  $\varepsilon_0$  und  $\sigma$  die Werte von  $\varepsilon$  zu berechnen.

## § 2. Die Funktion $P(\varepsilon)$ .

Da die Frequenzgleichung (20) zwei Konstanten enthält, ist sie einigermaßen kompliziert. Wir erleichtern die Diskussion, indem wir uns zunächst einen Überblick über den Verlauf der Funktion  $P(\varepsilon)$  verschaffen.

Nach (18) sind die Nullpunkte die Wurzeln der Gleichung

$$(21) \quad \psi(\varepsilon) = \varepsilon \sin \varepsilon + (1 - \varepsilon^2) \cos \varepsilon = 0,$$

während die Unendlichkeitspunkte sich aus

$$(22) \quad \varphi(\varepsilon) = \varepsilon \cos \varepsilon - (1 - \varepsilon^2) \sin \varepsilon = 0$$

ergeben.

Es sei übrigens bemerkt, daß die Wurzeln von (22) die sogenannten freien Schwingungen der Kugel darstellen<sup>1)</sup>, wie man leicht sieht, wenn man annimmt, daß kein Dipol im Zentrum vorhanden ist ( $F = 0$ ) und den Wert von  $\Phi$  aus (5) in (9) einsetzt.

(21) ist gleichbedeutend mit der Gleichung

$$(21') \quad \omega(\varepsilon) = \operatorname{tg} \varepsilon - \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} = 0.$$

Man erhält ihre Lösungen graphisch, indem man die Schnittpunkte der Kurven  $Y = \operatorname{tg} \varepsilon$  und  $y = \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}$  bestimmt.

Ist  $\varepsilon'$  ein Näherungswert, so ist

$$\varepsilon = \varepsilon' - \frac{\omega(\varepsilon')}{\varepsilon'^2 - 2}$$

nach der Regula falsi ein besserer Wert. Für große  $\varepsilon$  gilt genähert  $\operatorname{tg} \varepsilon = \varepsilon$ , d. h.

$$\varepsilon_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Eine genauere Formel für  $\varepsilon_n$  findet sich bei Euler, Introd. in anal. inf. II, 319; vgl. auch Jahnke und Emde, Funktionentafeln, Leipzig und Berlin 1909, S. 2, wo die numerischen Werte der Wurzeln angegeben sind. Es folgt

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1 = 4,480, & \varepsilon_3 = 10,90, \\ \varepsilon_2 = 7,723, & \varepsilon_4 = 14,07 \\ & \text{usw.} \end{array}$$

Beschränken wir uns auf vier Ziffern, so ist bereits die Lösung  $\varepsilon_3$  von (21') mit der entsprechenden der Eulerschen Gleichung  $\operatorname{tg} \varepsilon = \varepsilon$  identisch.

(22) ist gleichbedeutend mit

$$(22') \quad \varrho(\varepsilon) = \operatorname{ctg} \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon = 0.$$

1) Besser gesagt, diejenigen freien Schwingungen, welche dem von uns behandelten Typ ( $\Phi$  nur Funktion von  $r$  und  $t$ ) entsprechen.

Eine erste Näherung ist

$$\varepsilon' = n\pi - \frac{1}{n\pi}.$$

Die Regula falsi gibt den besseren Wert

$$\varepsilon = \varepsilon' + \frac{q(\varepsilon')}{\varepsilon'^2 - 2}.$$

So berechnen sich die Wurzeln

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0^1), & \varepsilon_5 &= 12,48, \\ \varepsilon_2 &= 2,744, & \varepsilon_6 &= 15,64, \\ \varepsilon_3 &= 6,117, & \varepsilon_7 &= 18,80, \\ \varepsilon_4 &= 9,817, & & \end{aligned}$$

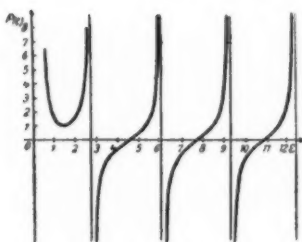


Fig. 1.

Die nachfolgende Tabelle 1 gibt  $P(\varepsilon)$  als Funktion von  $\varepsilon$  und Fig. 1 die entsprechende graphische Darstellung. Erleichtert wird die Berechnung durch die Bemerkung, daß für große Argumente

$$P(\varepsilon) = -\operatorname{ctg}\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

ein guter Näherungswert ist.

### § 3. Lösungen der Frequenzgleichung.

Die Frequenzgleichung (20), die für jeden Wert  $\varepsilon_0$  und für jeden Wert  $\sigma$  unendlich viele Lösungen, im ganzen also  $\infty^3$ -Lösungen besitzt, ist der graphischen Behandlung und der Diskussion sehr viel zugänglicher, wenn wir

$$(23) \quad \varepsilon^2 = x; \quad \varepsilon_0^2 = x_0; \quad \varepsilon^3 P(\varepsilon) = y; \quad \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0} = \alpha$$

einführen ( $x_0$  ist dem Quadrat der Eigenfrequenz des Oszillators proportional,  $x$  dem Quadrat der gesuchten Frequenzen des Systems). Dann ergibt sich nämlich aus (20)

$$(24) \quad y = -\frac{1}{\alpha} (x - x_0).$$

1)  $\varepsilon_1 = 0$  ist dreifache Wurzel.

Tabelle 1.

$\varepsilon$	$P(\varepsilon)$	$x = \varepsilon^2$	$y = \varepsilon^3 P(\varepsilon)$	$\varepsilon$	$P(\varepsilon)$	$x = \varepsilon^2$	$y = \varepsilon^3 P(\varepsilon)$
0,2	185,3	0,04	1,48	6,2	-12,32	38,44	-2936
0,4	22,5	0,16	1,44	6,4	-3,53	40,96	-926
0,6	6,48	0,36	1,40	6,6	-1,96	43,56	-564
0,8	2,76	0,64	1,41	6,8	-1,27	46,24	-400
1,0	1,56	1,00	1,56	7,0	-0,86	49,00	-294
1,2	1,13	1,44	1,96	7,2	-0,56	51,84	-210
1,4	1,03	1,96	2,82	7,4	-0,33	54,76	-133
1,6	1,09	2,56	4,46	7,6	-0,12	57,76	-53,3
1,8	1,28	3,24	7,44	7,8	0,07	60,84	36,0
2,0	1,62	4,00	12,9	8,0	0,28	64,00	143,0
2,2	2,23	4,84	23,76	8,2	0,50	67,24	279,5
2,4	3,55	5,76	49,07	8,4	0,79	70,56	466
2,6	8,46	6,76	148,8	8,6	1,16	73,96	744
2,8	-21,26	7,84	-146,6	8,8	1,79	77,44	1218
3,0	-4,56	9,00	-123,2	9,0	3,09	81,00	2254
3,2	-2,42	10,24	-79,3	9,2	8,64	84,64	6728
3,4	-1,56	11,56	-61,3	9,4	-12,11	88,36	-10060
3,6	-1,07	12,96	-50,0	9,6	-3,47	92,16	-3079
3,8	-0,74	14,44	-40,6	9,8	-1,93	96,04	-1816
4,0	-0,48	16,00	-31,0	10,0	-1,25	100,0	-1247
4,2	-0,27	17,64	-20,1	10,2	-0,84	104,0	-887
4,4	-0,08	19,36	-6,6	10,4	-0,54	108,2	-612
4,6	0,11	21,16	10,9	10,6	-0,31	112,4	-369
4,8	0,31	23,04	34,5	10,8	-0,102	116,6	-130
5,0	0,54	25,00	67,1	11,0	0,096	121,0	128,4
5,2	0,82	27,04	114,8	11,2	0,30	125,4	426
5,4	1,20	29,16	189,3	11,4	0,54	130,0	795
5,6	1,83	31,36	321,0				
5,8	3,15	33,64	605,7				
6,0	8,78	36,00	1987,0				

Die Lösungen dieser Gleichung sind die Schnittpunkte der Kurve  $y(x)$  und der Geraden

$$Y = -\frac{1}{a}(x - x_0),$$

die durch den Punkt  $x_0$  der Abszissenachse geht und gegen diese eine sehr große Neigung hat, da das logarithmische Dekrement des Oszillators nach Voraussetzung klein ist und dasselbe nach (23) also auch für  $a$  gilt. Obige Tabelle enthält zusammengehörige Werte von  $y$  und  $x$ , und die Fig. 2 stellt  $y$  als Funktion von  $x$  dar. Die Null- und Unendlichkeitsstellen sind natürlich die Quadrate der für  $P(\varepsilon)$  geltenden.

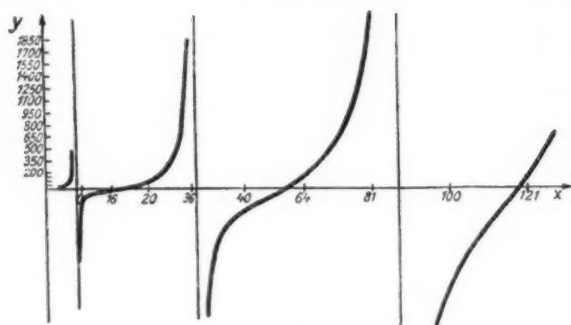


Fig. 2.

Fig. 3 gibt noch einmal schematisch  $y$  als Funktion von  $x$ . Wir wollen die Abszissen der Asymptoten  $r_1, r_2, r_3, \dots$  die Resonanzpunkte nennen. Diese stellen die freien Schwingungen

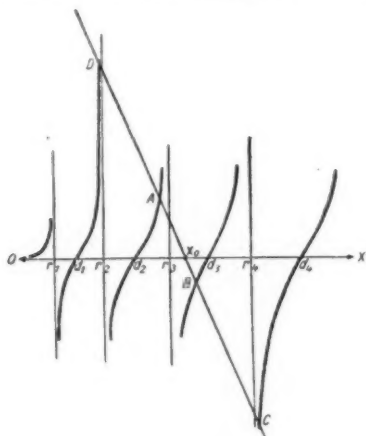


Fig. 3.

der Kugel dar. Fällt  $x_0$  mit einem dieser Werte zusammen, so wollen wir sagen, daß Resonanz zwischen dem Oszillator und der Kugel besteht.

Die Dissonanzpunkte  $d_1, d_2, d_3, \dots$  seien die Nullstellen der Funktion  $y$ . Fällt  $x_0$  mit einem dieser Werte zusammen,



so wollen wir, um einen einfachen Ausdruck zur Verfügung zu haben, sagen, daß Dissonanz zwischen dem Oszillator und der Kugel besteht.

Wie aus Fig. 3, in welche der Punkt  $x_0$  und die durch ihn gehende Gerade eingezeichnet sind, unmittelbar hervorgeht, gibt es im allgemeinen eine Wurzel (Abszisse des Schnittpunktes  $B$ ), welche — wegen der starken Neigung der Geraden — sehr nahe bei  $x_0$  liegt, d. h. fast der Eigenschwingung des Dipols entspricht, während die anderen Wurzeln (Abszissen der Schnittpunkte  $A, C, D \dots$ ) sehr nahe bei den Eigenschwingungen der Kugel liegen. Die Verstimmung ist um so geringer, je kleiner die Dämpfung des Dipols ist, weil dann  $\alpha$  kleiner, d. h. die Gerade steiler ist. Ist die Dämpfung des Dipols Null, die Gerade also vertikal, so haben wir als mögliche Schwingungen die unveränderten freien Perioden der Kugel sowie des Dipols.

Die Eigenschwingungen der Kugel, welche kleiner als die des Dipols sind, werden durch die Koppelung mit dem Dipol verkleinert, die anderen vergrößert.

Die Eigenschwingung des Dipols wird durch die Koppelung mit der Kugel vergrößert bzw. verkleinert, je nachdem die Eigenschwingung des ungekoppelten Dipols als linken Nachbarn einen Resonanz- oder Dissonanzpunkt hat.

Je näher  $x_0$  einem Dissonanzpunkte rückt, um so geringer fällt die Verstimmung des Dipols infolge Anwesenheit der Hülle aus. Ist der Dipol genau in der Dissonanz mit der Kugel, so wird er nicht verstimmt; außerdem treten die Eigenschwingungen der Kugel, leicht verstimmt, auf.

Fällt dagegen  $x_0$  mit einem Resonanzpunkte zusammen, so löst dieser sich in zwei auf (Schwebungen), und dazu kommen die leicht verstimmten anderen Resonanzpunkte als mögliche Schwingungen.

Rechnerisch gestaltet sich die Ermittlung der Verstimmung des Dipols infolge Vorhandenseins der Kugel folgendermaßen. Aus (20) folgt für den Wert  $\varepsilon$ , der  $\varepsilon_0$  sehr nahe liegt, so daß  $\varepsilon + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0$  gesetzt werden darf,

$$\varepsilon^3 P(\varepsilon) = - \frac{\pi \varepsilon_0}{\sigma} (\varepsilon^3 - \varepsilon_0^3),$$

d. h.

$$(25) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \left[ 1 - \frac{\sigma}{2\pi} P(\varepsilon_0) \right],$$

wenn nicht  $\epsilon_0$  sehr nahe bei einem Resonanzpunkte [ $P(\epsilon_0)$  sehr groß] liegt. Für große  $\epsilon_0$  geht  $P(\epsilon_0)$  in  $-\text{ctg } \epsilon_0$  über, so daß dann

$$(25) \quad \epsilon = \epsilon_0 \left[ 1 + \frac{\sigma}{2\pi} \text{ctg } \epsilon_0 \right]$$

gilt.

Für große Wurzeln, die den verstimmten Eigenschwingungen der Kugel entsprechen, dürfen wir  $\epsilon = n\pi + \xi$  setzen, und es folgt genähert

$$\xi = \frac{n\pi\alpha}{1 - \frac{\epsilon_0^2}{n^2\pi^2}},$$

d. h.

$$(26) \quad \epsilon_n = n\pi \left[ 1 + \frac{\alpha}{1 - \frac{\epsilon_0^2}{n^2\pi^2}} \right].$$

Die Differenz zweier aufeinander folgender großer  $\epsilon$  ist also genähert

$$(26) \quad \epsilon_{n+1} - \epsilon_n = \pi(1 + \alpha).$$

La Plata, 15. August 1920.

Instituto de Física.

(Eingegangen 13. Dezember 1920.)

#### 4. Über die Bestimmung des elektrischen Elementarquantums aus dem Schroteffekt; von C. A. Hartmann.

(Mitteilung aus dem Lab. K der Siemens & Halske A.-G., Wernerwerk.)

Für Erscheinungen, die sich bei durchschnittsmäßiger (mikroskopischer) Betrachtung als stetig, bei einer genauen (atomistisch-mikroskopischen) Untersuchung jedoch als völlig unstetig darstellen, gibt es noch eine dritte zwischen diesen beiden stehende Untersuchungs- und Betrachtungsweise, bei der sich die mikroskopischen Unstetigkeiten als Schwankungen stetiger Größen äußern. Solche Schwankungen elektrischer Natur — radioaktive Zerfalls- und Strahlungsschwankungen und Schwankungen von Ionisierungsströmen — haben mit an erster Stelle E. Meyer und E. Regener untersucht.<sup>1)</sup> Der Verstärker, ein Geschenk der jüngsten Entwicklung der Technik, erweitert die Möglichkeit derartiger Untersuchungen und hat auch zur vorliegenden Arbeit geführt. Es handelt sich hier um die Messung spontaner Stromschwankungen der Hochvakuum-entladung, die W. Schottky theoretisch behandelt (Ann. d. Phys. 57. S. 541. 1918) und mit dem Namen „Schroteffekt“ gekennzeichnet hat.

##### I. Voruntersuchungen und engere Problemstellung.

§ 1. Der leitende Gedanke dieser Untersuchung war zunächst — in Übereinstimmung mit W. Schottky a. a. O. S. 553 — die Spannungsschwankungen zu messen, die durch den Schroteffekt an einem an das Entladungsrohr angelegten Schwingungskreis hervorgerufen werden (Fig. 1), und mit Hilfe der Schottkyschen Rechnung zu einer Bestimmung des Elementarquantums zu schreiten. Die Größe dieser Schwankungen wurde durch Vergleich mit einem

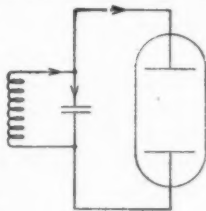


Fig. 1.

1) Die zugehörige Literatur findet man in dem diese Schwankungserscheinungen ganz allgemein behandelnden Referate von R. Fürth, Physik. Zeitachr. 20. S. 376. 1919 auf S. 380. Vgl auch die neuere Arbeit desselben Verfassers, Jahrb. f. Rad. u. Elektr. 16. S. 319. 1920.

Standardton bekannter Intensität gemessen und aus ihr die mittlere Stromschwankung des Schroteffektes  $C$  ermittelt. Genauer gesagt: Es wurden die Spannungsschwankungen gemessen, die am Schwingungskreis ein sinusförmiger Strom  $C$  von der Frequenz  $2\pi/\tau$  hervorruft, der infolge der Wirkung des Anodenbombardements durch den Entladungsstrom  $i_0$  auf den Schwingungskreis als im Entladungsrohre vorhanden angenommen werden kann. Die Frequenzen, die zur Anwendung gelangten, bewegten sich zwischen 240 und 2400 Perioden/Sek.

Schottky leitet für den effektiven Wert der mittleren Schwankung den Ausdruck

$$C = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon i_0}{\tau}}$$

ab (a. a. O. S. 561), wobei  $\varepsilon$  das Elementarquantum bedeutet.

Ist  $V$  die durch den Vergleich mit dem Standardton gemessene Spannungsschwankung am Schwingungskreis,  $Z_0$  seine Impedanz, so ist

$$C = \frac{V}{Z_0}.$$

Es wird also

$$(1) \quad \varepsilon = \frac{V^2}{i_0 \omega_0 Z_0^2},$$

wo

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$$

ist.

§ 2. Die einleitenden Versuche zeigten zunächst, daß der Ton etwa 5000fach linear verstärkt werden mußte. Es war nicht angängig — wegen der damit verbundenen Geräusche —, noch höhere Verstärkungen in Anwendung zu bringen, so erwünscht es wegen der außerordentlichen Tonschwäche gewesen wäre. Sie zeigten weiterhin, daß der Ton kein konstanter, sondern leisen Intensitätsschwankungen unterworfen war, die auf die Dämpfung des Kreises zurückzuführen waren, derart, daß sie bei genügend kleiner Dämpfung hätten zum Verschwinden gebracht werden können. Es ist dies dieselbe Erscheinung, die Schottky (a. a. O. S. 561) mit „Reinheit der Schwingungen“ bezeichnet. Es gelang auch späterhin nicht, einen Kreis von so geringer Dämpfung herzustellen, daß diese Tonschwankungen ganz verschwanden. Immerhin war

$$\frac{\pi \vartheta}{\tau} = \frac{\omega_0 L}{R} \sim 150,$$

größer als Schottky (a. a. O. S. 561) für die Abklingzeiten vorgeschlagen hatte.

Merkwürdigerweise fielen aber die  $\varepsilon$ -Werte samt und sonders zu klein aus, wenn man sie mit Hilfe der aus der Schottky'schen Theorie hergeleiteten Gleichung (1) berechnete. Hierbei zeigte sich nun, daß der beobachtete Effekt nicht etwa die Folge von andersartigen Störungen höherer Größenordnung war oder daß solche Störungen den erwarteten Effekt verdeckten. Auch der ebenfalls bei W. Schottky (a. a. O.) behandelte Wärmeeffekt war nicht für die Erscheinung verantwortlich zu machen, was eine einfache Überlegung zeigte. Die  $\varepsilon$ -Werte wiesen ferner eine Abhängigkeit von der Frequenz des Schwingungskreises auf, derart, daß sie mit steigender Frequenz im ganzen kleiner wurden. Es handelte sich dabei um größenordnungsmäßige Unterschiede, da die gemessenen Werte im Gebiete  $10^{-22}$  bis  $10^{-21}$  Coulomb lagen. Mit Annäherung an  $\omega_0 = 0$  fand anscheinend auch eine Annäherung an den Standardwert von  $\varepsilon = 1,56 \cdot 10^{-19}$  Coulomb statt. Der experimentellen Festlegung dieses Ergebnisses und seiner Klärung wurde daher von da an das Hauptinteresse gewidmet.

§ 3. Die hierauf abzielenden Bemühungen hatten nun zwei Ursachenbereiche zu unterscheiden. Einmal war es möglich, daß der unerwartete Frequenzeffekt sich auf die Unzulänglichkeiten der Meßanordnung zurückführen ließ. Konnte aber gezeigt werden, daß hier keine Abhängigkeiten von der Frequenz unberücksichtigt und ununtersucht geblieben waren, so blieb nur die zweite Möglichkeit offen: die Ursache war eine innere, sie war im Mechanismus der Elektrizitätsleitung zu suchen.

Von den Größen, die in Gleichung (1) eingehen, kommen vor allen Dingen  $V$ , die Spannung am Schwingungskreis, und  $Z_0$ , seine Impedanz, in Frage.  $V$  wird gemessen. Dagegen stecken in  $Z_0$  alle Konstanten der Apparatur, von denen wieder die wichtigste die Dämpfung des Kreises ist. Außer durch seine eigenen Verluste wird der Kreis durch das ihm parallele Rohr und die Verstärkeranordnung gedämpft. Es soll also im folgenden die Untersuchung der Meßapparatur unter dem erwähnten Gesichtspunkte, und zwar mit besonderer Berücksichtigung der wichtigen Teile, beschrieben werden.

## II. Die Untersuchung der Meßanordnung.

## 1. Das Rohr.

§ 1. Als erster Hauptgegenstand der Untersuchung kam das Rohr, ein Hochvakuumrohr mit Glühkathode, in Frage, das, wie leicht einzusehen, weitgehend evakuiert sein mußte.<sup>1)</sup>

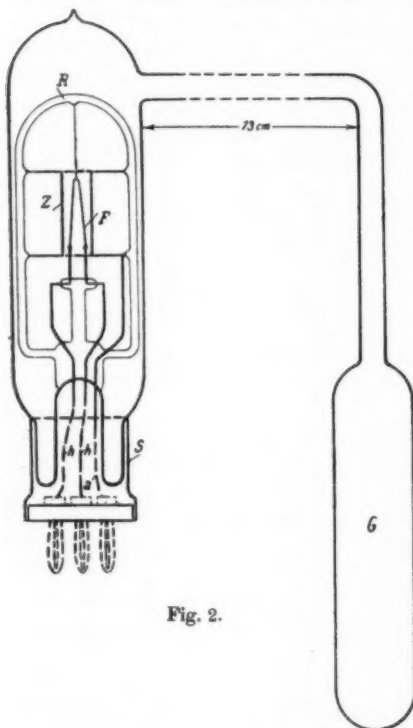


Fig. 2.

Es wurden daher Röhren mit Tantalano- den ausgewählt, die zu- erst ein vorzügliches Va- kuum aufwiesen. Das während des Gebrauchs freiwerdende Gas — es handelte sich wegen der hohen Entgasung der Elektroden um Spuren — mußte aber, wie sich zeigte, entfernt werden, was, wie üblich, mit Kohle und flüssiger Luft erreicht wurde. Zu die- sem Zwecke wurde ein Rohr (vgl. Fig. 2) von 5 cm Durchmesser und 15 cm Länge am oberen Ende mit einem seit- lichen Ansatz versehen. Innerhalb des Rohres waren koaxial an einem Glasrahmen R Kathode und Anode angeordnet. Die Kathode war ein V-förmiger Wolfram- faden F von etwa

5,5 cm Länge und 0,13 mm Durchmesser, dessen normale Strombelastung im fertigen Rohr etwa 2,5 Amp. betrug. Die Anode, die den Faden umgab, war ein 3,2 cm langer Zylinder Z

1) Gasreste haben unter Umständen im Schwingungskreis Schwan- kungen höherer Größenordnung zur Folge. Hierauf läßt sich eine Methode der Vakuumbeobachtung gründen, die besonders empfindlich ist, falls der Schwingungskreis parallel zu Gitter und Kathode eines Hochvakuum- rohres liegt.

aus Tantalblech vom Querschnitt einer Ellipse, deren größter Durchmesser 1,1 cm, deren kleinster 0,8 cm maßen. Das Rohr wurde nach 90stündigem Evakuieren mit einem Sockel  $S$  versehen. Etwa freiwerdendes Gas konnte jetzt vor jeder neuen Meßreihe weitgehend absorbiert werden.

§ 2. Die Kenntnis des inneren Widerstandes ist zur Klärung des Effektes, wie gesagt, von großer Bedeutung. Um die Dämpfung des Kreises klein zu halten, muß, wie leicht einzusehen, der Rohrwiderstand möglichst hoch sein. Deswegen wurde auch im Sättigungsgebiet gearbeitet; denn der Wechselstromwiderstand eines Leiters, der eine bestimmte Stromspannungscharakteristik  $(\beta, B)$  aufweist, ist  $1: \frac{\partial \beta}{\partial B}$ .

Seine Bestimmung mußte für verschiedene Heizstromstärken, d. i. Sättigungsströme  $i_0$  erfolgen. Es wurden zwei verschiedene Wege eingeschlagen. Der erste wird durch eine statische Methode dargestellt. Ändert man  $B$  um den endlichen Betrag  $\Delta B$ , so ändere sich  $\beta$  um den Betrag  $\Delta \beta$ . Wählt man nun  $\Delta B$  so, daß der lineare Teil der  $(\beta, B)$ -Charakteristik (Sättigungsgebiet) nicht überschritten wird, so ist der Rohrwiderstand

$$R_i = \frac{1}{\partial \beta / \partial B} = \frac{\Delta B}{\Delta \beta}.$$

Das Rohr befand sich während der Messung an demselben Ort wie bei den Schroteffektmessungen. Eine Batterie  $B_2$  von 50 Volt konnte mit Hilfe eines zweipoligen Umschalters  $U$  zur Batterie  $B_1$  von ungefähr 200 Volt hinzu- oder ihr entgegengeschaltet werden. Es war konstant

$$\Delta B = (257,0 - 149,6) = 107,4 \text{ Volt.}$$

Die Tab. 1 gibt die Stromänderungen  $\Delta \beta$  in Abhängigkeit von den Sättigungsströmen  $i_0$  und die damit berechneten  $R_i$ .

Tabelle 1.

$i_0$	$\Delta B$	$\Delta \beta$	$R_i$
$0,88 \cdot 10^{-3} \text{ A}$	$107,4 \text{ V}$	$0,045 \cdot 10^{-3} \text{ A}$	$23,8 \cdot 10^6 \Omega$
1,04		0,054	19,8
1,50		0,081	13,2
3,00		0,165	6,5
4,50		0,228	4,7
10,0		0,50	2,1
14,0		0,60	1,8
20,0		0,91	1,2

§ 3. Der zweite Weg war die Bestimmung von  $R_i$  in der Brückenschaltung mit Wechselstrom, der auch von H. Barkhausen (Jahrbuch drahtl. Telegr. u. Teleph. 14. S. 96. 1919) erwähnt wird. Er erschien deswegen wichtig, weil er geeignet war, eine etwaige Frequenzabhängigkeit aufzudecken, die als Fehlerquelle für den aufzuklärenden Effekt in Frage kam. Die voranstehende Messung (Tab. 1) hatte nun gezeigt, daß es sich bei  $R_i$  um Widerstände von  $10^5$ — $10^6$  Ohm handelt. Der „Brückendraht“ mußte also recht hochohmig sein. Als guter Ersatz stellte sich der Widerstand ( $10200 \Omega$ ) eines Siemenschen Kompensationsapparates heraus, wie er zusammen mit der bekannten Sprechfrequenzmaschine nach A. Franke gebraucht wird.

Zur Vermeidung von Erdkapazitäten und -Nebenschlüssen wurden die Batterien gegen Erde durch Porzellansockel isoliert und die Kapazitäten gegen Erde durch entsprechende Aufstellung der hohen Widerstände und geeignete Verlegung der Zuleitungen und deren Schutz beseitigt. Die Schaltung, mit der sich störungsfreie Messungen schließlich erzielen ließen, stellt

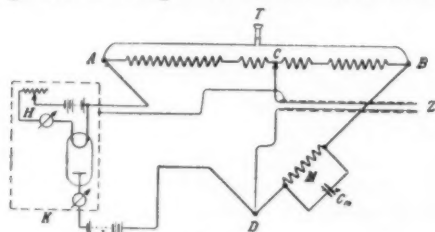


Fig. 3.

Fig. 3 dar. Als Wechselstromquelle diente eine Röhrenerregerschaltung, die fast rein sinusförmigen Strom erzeugte und die Frequenz bis auf Bruchteile einer Periode pro Sekunde konstant hielt. Sie befand sich in einem Nebenraum. Die elektrisch geschützten Zuleitungen  $Z$  waren kapazitäts- und selbstinduktionsarm. Der Aufbau der Apparatur im Schutzkasten  $K$  war der gleiche wie bei den eigentlichen Untersuchungen am Schroteffekt.

Die Messungen zeigten nun zunächst, daß ein gutes Minimum sich erst erzielen ließ, wenn parallel zum Widerstand  $M$  noch ein Drehkondensator  $C_m$  angelegt wurde. Das



Rohr besaß also Kapazität. Für seinen komplexen Widerstandsoperator gilt

$$1/\mathfrak{R} = 1/R_i + j\omega C_i,$$

während der Vergleichszweig den Operator  $\mathfrak{M}$  hat, wo

$$1/\mathfrak{M} = 1/M + j\omega C_m.$$

Mithin lautet in diesem Fall die Minimumbedingung für Wechselstrom

$$b \mathfrak{R} = a \mathfrak{M}.$$

Hiernach wird nach Einsetzen und Trennen von Reell und Imaginär

$$(2) \quad R_i = \frac{a}{b} M \quad \text{und} \quad C_i = \frac{b}{a} C_m.$$

Die Messungen wurden bei den Frequenzen 3500, 5000 und 7000 für sechs verschiedene Sättigungsströme  $i_0$  vorgenommen. Die Tabellen 2—4 geben die aus den Werten von  $a/b$  und den Kapazitäten nach den Gleichungen (2) berechneten Werte für  $R_i$  und  $C_i$  in Abhängigkeit von  $i_0$  wieder. Man erkennt, daß eine Abhängigkeit des Rohrwiderstandes von der Frequenz nicht besteht. Deswegen ist in der Fig. 4, welche die Tabellen 2—4 graphisch darstellt, für die zu den einzelnen  $i_0$  gehörigen Werte von  $R_i$  jeweils das Mittel aus den Bestimmungen bei den drei Frequenzen genommen worden.

Tabelle 2.

 $\omega = 3500$ 

$i_0$	$R_i$	$C_i$
1	$18,2 \cdot 10^5 \Omega$	$-1 \cdot 10^{-11} \text{ F}$
2	10,8	0
5	4,50	2
10	2,22	7
15	1,46	10
20	1,05	18

In Fig. 4 sind auch die der Tab. 1 entnommenen Ergebnisse der statischen Messung ( $\omega=0$ ) als kleine Kreuzcheneingezeichnet. Diese Werte fallen zu beiden Seiten der letztermittelten Kurve. In Anbetracht dessen, daß ihnen eine weit geringere Genauigkeit zukommt infolge der kleinen  $\Delta \beta$  als der

letzten Messung, bei der die Genauigkeit etwa 1 Proz. ist, muß man die Übereinstimmung zwischen den beiden Methoden als eine sehr gute bezeichnen. Die Unabhängigkeit des Rohrwiderstandes von der Frequenz ist somit dargetan.

Merkwürdig bleibt die ebenfalls in Fig. 4 dargestellte Rohrkapazität  $C_i$ . Sie steigt mit wachsenden Sättigungsströmen an. Von der Frequenz ist sie praktisch unabhängig. Es kann sich hierbei nur um eine scheinbare Kapazität handeln,

der möglicherweise ein Trägheitseffekt der Elektronenemission zugrunde liegt, indem (nach Wehnelt) die Elektronenemission selbst eine Abkühlung des Fadens bewirkt und bei Veränderung der Elektronenemission durch das angelegte Potential sich die

Tabelle 3.

 $\omega = 5000$ 

$i_0$	$R_i$	$C_i$
1	$18,1 \cdot 10^5 \Omega$	$-1 \cdot 10^{-11} \text{ F}$
2	10,6	0
5	4,50	3
10	2,21	7
15	1,45	13
20	1,04	18

Tabelle 4.

 $\omega = 7000$ 

$i_0$	$R_i$	$C_i$
1	$18,0 \cdot 10^5 \Omega$	$-1 \cdot 10^{-11} \text{ F}$
2	10,6	0
5	4,48	2
10	2,18	6
15	1,44	11
20	1,05	15

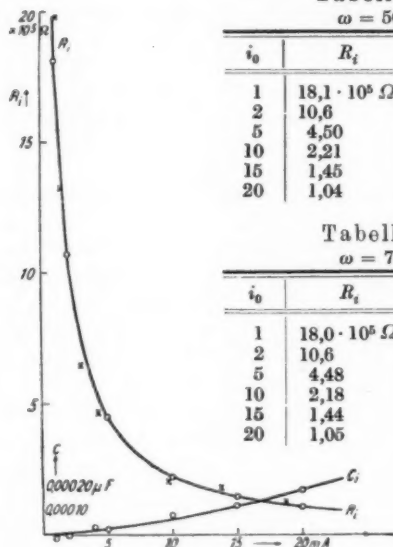


Fig. 4.

zugehörige „statische“ Temperatur nicht sofort einstellt. Als mögliche Fehlerquellen kämen noch Restkapazitäten gegen Erde und die Kapazität der Zuleitungen zum Rohr in Frage. Deshalb wurde genau an die Stelle des Rohres ein kapazitätsfreier Widerstand  $W$  geschaltet und dieser mit dem Widerstand  $M$  verglichen. Die Kapazität der Zuleitungen ergab sich zu  $2 \cdot 10^{-11} \text{ F}$ . Sie ist bereits bei den in Tabellen 2—4 angegebenen Werten ebenso wie die Eigenkapazität  $C_m$  von  $M$  berücksichtigt. Kapazitäten gegen Erde waren, wie sich weiter herausstellte, nicht mehr vorhanden. An der Realität der scheinbaren Rohrkapazität ist somit wohl nicht zu zweifeln.

Der innere Widerstand des Rohres ist nunmehr als hinreichend bekannt anzusehen. Eine Erklärung für die zu kleinen

Elementarquanten ergibt sich hieraus nicht. Sämtliche überhaupt möglichen Abweichungen — soweit das Rohr in Betracht kommt — sind von viel geringerer Größenordnung als der Effekt.

## 2. Der Schwingungskreis.

§ 1. Der zweite Hauptbestandteil der Schaltung, dessen Eigenschaften hinreichend bekannt sein mußten, wollte man die Ursache für den erwähnten Effekt finden, war der Schwingungskreis, der dem Rohr parallel lag. Seine Dämpfung mußte möglichst klein sein. Wie später gezeigt wird, ist nun die zusätzliche Dämpfung des Schwingungskreises durch äußere Schaltelemente desto kleiner, je kleiner die Impedanz, also [vgl. weiter unten Gleichung (3)] je kleiner die Selbstinduktion  $L$  bei gegebenem kleinen Eigendämpfungswiderstand  $R$  ist. Andererseits wird im allgemeinen bei einer Spule  $L/R$  mit  $L$  kleiner. Für die Selbstinduktion ergibt sich daraus ein mäßig großer günstigster Wert. Bei Wechselstrom treten zu den Ohmschen Verlusten aber noch die Verluste durch Hysteresis und Wirbelströme. Es kam demnach darauf an, diese möglichst klein zu machen, also große Eisenquerschnitte zu benutzen und das Eisen, das möglichst schmale Hysteresisschleifen haben mußte, fein zu unterteilen.

Diesen Anforderungen genügte schließlich eine Ringspule deren Kern 9 cm inneren, 17 cm äußeren Durchmesser und eine Höhe von 4 cm besaß. Er bestand aus vielen 0,1 mm starken isolierten Stahldrähten und wurde mit 740 Windungen isoliertem Kupferdraht von etwa 1,8 mm Durchmesser bewickelt.

Die Kapazität des Kreises, in der Größenordnung von  $10^{-6}$  bis  $10^{-8}$  F, mußte natürlich auch so verlustfrei wie möglich gewählt werden. Nur Glimmerkondensatoren kamen in Frage. Zur Feinregulierung wurde ein Luftdrehkondensator von etwa  $2 \cdot 10^{-9}$  F Maximalkapazität parallel geschaltet.

§ 2. Der so wichtige Gesamtwiderstand  $R$  des Kreises selbst und seine Selbstinduktion  $L$  wurden nun folgendermaßen bestimmt: Die Spule, von einer 1 mm starken Zinkkappe umgeben, und die Kapazitäten  $C$  wurden in Reihe geschaltet und zu einem Zweig einer Wheatstonschen Brücke gemacht. In den anderen Zweig kam ein Ohmscher Widerstand  $W$  mit Wicklungen nach Chaperon. Als Stromquelle diente die gleiche Erregerschaltung wie bei der Ermittlung des Rohr-

widerstandes. Die Brückenschaltung war im übrigen ähnlich wie bei der Messung von  $R_i$ , ebenso der elektrostatische und elektromagnetische Schutz. Nachdem die Frequenz eingestellt war, wurden Selbstinduktion  $L$  und Kapazität  $C$  in Stromresonanz gebracht und gleichzeitig auf dem Brückendraht das Minimum gesucht. Da der Resonanzbrückenweig die Phase 0 besitzt, so ergibt sich der gesamte Dämpfungswiderstand zu

$$R = \frac{a}{b} W,$$

wenn  $a/b$  das Brückenverhältnis bedeutet und die Selbstinduktion zu

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C}.$$

Tabelle 5.

Meßspannung	R in $\Omega$			L in Hy		
	$3 \cdot 10^{-3}$ V	$12 \cdot 10^{-3}$ V	$20 \cdot 10^{-3}$ V	$3 \cdot 10^{-3}$ V	$12 \cdot 10^{-3}$ V	$20 \cdot 10^{-3}$ V
$\omega_0 = 1500$	—	2,41	—	—	—	—
2400	2,37	—	—	—	—	—
3500	2,13	2,30	2,35	0,1160	0,1162	0,1165
5000	2,98	3,05	3,10	0,1166	0,1166	0,1168
7000	4,25	4,30	4,40	0,1162	0,1162	0,1167
9400	6,66	6,71	6,76	0,1176	0,1176	0,1176
12000	9,2	9,2	9,4	0,1185	0,1185	0,1187
15000	—	13,9	14,0	0,1206 ?	0,1206	0,1206

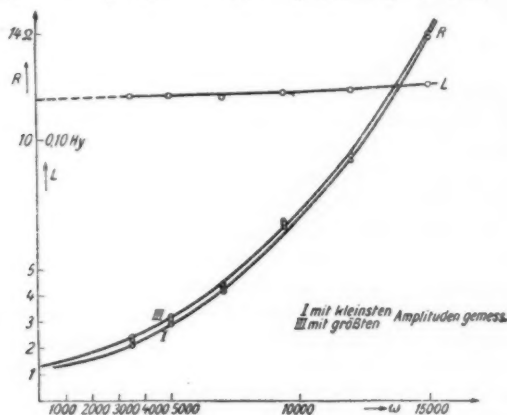


Fig. 5.

Es wurde bei acht verschiedenen Frequenzen  $\omega_0$  gemessen, wobei jede Messung mit drei verschiedenen Stromstärken vorgenommen wurde. In der Tab. 5 sind die auf diese Weise ermittelten Werte für die verschiedenen Frequenzen und Meßspannungen zusammengestellt und in der Fig. 5 wenigstens für die Frequenzen 3500—15000 veranschaulicht. Es ist zu sehen, daß sich  $L$  nur wenig ändert,  $R$  dagegen mit der Frequenz stark zunimmt und auch für große Stromstärken bis 10 Proz. größer als für kleine ist. Die Figur zeigt in  $L$  Mittelwerte in bezug auf die verschiedenen Strombelastungen.

§ 3. Diese Messungen könnten nun, was die Bestimmung von  $R$  anlangt, nicht ganz stichhaltig erscheinen, da nämlich während der Messung des Schroteffektes die Spule von einem Gleichstrom in der Größenordnung von  $10^{-3}$  bis  $10^{-2}$  Amp. durchflossen wurde, dem Sättigungsstrom  $i_0$ . Es wurde daher, und zwar um die Spule nicht magnetisch zu beschädigen, eine Spule derselben Type gemessen, wobei ihre Wicklung gleichzeitig von einem Gleichstrom durchflossen war. Die Art der Anordnung und die vorbeugenden Maßnahmen zur Vermeidung von Unsymmetrien der Verzweigung zeigt Fig. 6.

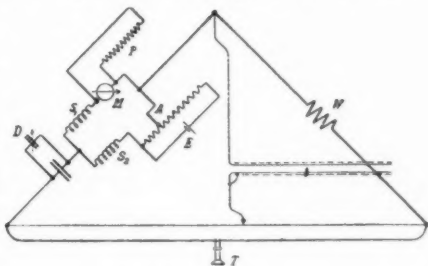


Fig. 6.

Unter der Annahme völliger Gleichheit von  $S_1$  und  $S_2$  sowohl in Selbstinduktion als in Widerstand und völliger Symmetrie der Verzweigung wird der Widerstand einer Spule

$$R' = 2r - R_c,$$

wo  $r$  den gemessenen Widerstand des Stromresonanzsystemes und  $R_c$  den Kombinationswiderstand, der in Reihe mit jeder Spule lag, bedeuten. Ist  $l$  die gemessene Selbstinduktion des Systemes, so wird die Selbstinduktion jeder der beiden Spulen

$$L = 2l.$$

Im übrigen ging die Messung ebenso vor sich wie die zur Bestimmung des Dämpfungswiderstandes des Schwingungs-

kreises. Zuerst wurden die Spulen diesmal sorgsam mit technischem Wechselstrom entmagnetisiert. Gemessen wurde bei der Frequenz 5000, wobei  $i$  bis zu einem Maximalbetrage von etwa 180 Milliamp. vergrößert und dann wieder bis auf Null verkleinert wurde. Die Fig. 7 veranschaulicht die beiden

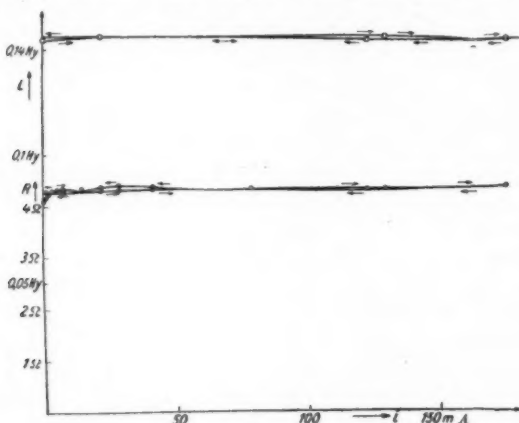


Fig. 7.

Funktionen  $R'$  und  $L$  von  $i$ .  $L$  ändert sich fast gar nicht,  $R'$  nur bei kleinem wachsendem  $i$ . Die Ungenauigkeiten rühren von einer Eigentümlichkeit der Spulen her, daß nämlich nach dem Einschalten einer neuen Gleichstromstufe  $L$  und  $R'$  nur langsam einem konstanten Werte zustreben, und zwar wurden  $L$  und  $R'$  innerhalb 12 Stunden ständig kleiner. Es geht also die Zeit in die beiden Größen noch ein. Alle Messungen wurden deshalb ungefähr 10 Minuten nach dem Einschalten einer neuen Gleichstromstufe gemacht. Es folgt also daraus, daß man bei einer beliebigen Gleichstrombelastung der Spule und Wechselstromamplitude stets mit dem fast konstanten  $R$  für höhere  $i$  (in diesem Falle 4,3—4,4 Ohm) rechnen kann, wenn man, wie dies ja bei der Absorption der Gasreste vor jeder Meßreihe späterhin geschieht, vorher längere Zeit größere Ströme  $i$  durch die Spule geschickt hat.

§ 4. Die Impedanz, die ein Schwingungskreis mit Selbstinduktion  $L$ , Kapazität  $C$  und Dämpfung  $R$  als Spannungs-

resonator für einen Wechselstrom der Frequenz  $\omega$  besitzt, berechnet sich in komplexer Darstellung zu

$$\mathcal{B} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}.$$

Für den Resonanzfall

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

geht dies nach Umformung über in

$$\mathcal{B}_0 = \frac{\omega_0^2 L^2 - j\omega_0 LR}{R}.$$

Es wird demnach der absolute Betrag, wenn  $\frac{\omega_0 L}{R} \gg 1$ ,

$$(3) \quad Z_0 = \frac{\omega_0^2 L^2}{R}.$$

Für die Phase gilt

$$(4) \quad \operatorname{tg} \varphi = - \frac{R}{\omega_0 L}.$$

$\varphi$  ist für die vorliegenden Abklingzeiten von der Größenordnung  $10'$ . Vorstehende Formel für  $Z_0$  ist abgeleitet unter der Voraussetzung, daß  $R$  in Reihe mit  $L$  geschaltet sei. Im vorliegenden Fall ist dies angenähert so. Der Kondensator trägt nur einen geringen Teil zur Dämpfung des Kreises bei. Man darf den Kreis also mit sehr großer Annäherung als Ohmschen Widerstand ansehen. Mit Gleichung (2) ergeben sich die in Tab. 6 zusammengestellten Werte für  $Z_0$ ; hier finden sich auch genauere Angaben über die Größe von  $\omega_0 L/R$ .

Tabelle 6.

$\omega_0$	$L_{Hy}$	$R_D$	$Z_0 \cdot 10^{-5} \Omega$	$\frac{\omega_0 L}{R}$
1500	0,116	2,41	0,126	72
2400	0,116	2,27	0,342	123
3500	0,116	2,1	0,786	193
5000	0,117	3,0	1,14	195
7000	0,117	4,2	1,60	195
9400	0,118	6,4	1,93	173
12000	0,119	9,3	2,19	154
15000	0,121	13,9	2,37	131

### 3. Vergleichstonquelle und Verstärker.

§ 1. Als Vergleichstonquelle bei allen Untersuchungen des Schroteffektes selbst, sowie bei allen Brückenmessungen diente eine Erregerschaltung, gleichfalls eine Anwendung der modernen

Hochvakuum-Glühkathodenröhren. Unter den sehr vielen möglichen Rückkopplungsschaltungen erscheint als eine der für Nieder- und Sprechfrequenzen geeignetsten die Doppelkreisschaltung.<sup>1)</sup> Die Variation der Frequenz wird durch Verändern der beiden Kondensatorgruppen vorgenommen, die zwangsweise mechanisch gekoppelt sind. Die Frequenz zeigt sich bei dieser Schaltungsweise als von dem Heizstrom und der Belastung weitgehend unabhängig. Die maximale Leistung der Schaltung beträgt etwa  $\frac{1}{5}$  Watt. Die Schaltung läßt an Konstanz der Frequenz und Reinheit der Sinusform jeden mechanischen Summer, und, was die Konstanz der Frequenz anlangt, jeden rotierenden Generator weit hinter sich. Wie sie zu den Messungen geschützt wurde, zeigt Fig. 8 (Erregerschaltung *E* im Eisengehäuse  $K_2$ ).

Das Frequenzbereich, das mit der Sprechfrequenzschaltung kontinuierlich überstrichen werden kann, geht von etwa 3500 bis 25000. Für die darunter liegenden Frequenzen wurde eine ganz ähnliche Niederfrequenzschaltung verwandt, die bis  $\omega = 300$  herunterreichte.

§ 2. Der letzte wichtige Teil der Apparatur ist der Verstärker — eine bestens geschützte Viererkaskade von Siemens & Halske — der sowohl die durch den Schroteffekt erzeugten Spannungsschwankungen am Kreise als auch die Vergleichsspannung verstärken soll. Nach dem Gesagten liegt er parallel zum Schwingungskreise, dämpft diesen mithin in unerwünschter Weise und muß deshalb eingangs mit Widerstandskapazitätsschaltung versehen werden. Als günstigste Abmessungen ergeben sich bei Sprechfrequenzen  $W = \frac{1}{2}$  Megohm,  $C = 5 \cdot 10^{-9}$  F. Die  $W$ - $C$ -Schaltung hat auch den weiteren Vorteil, die Selektivität der Anordnung gegenüber Schaltungen mit Eingangsübertragern herabzusetzen. Herabgesetzte Selektivität bedeutet, daß die verschiedenen Frequenzen gleichmäßiger verstärkt werden.

Der Verstärker in einem eisernen Kasten ( $K_3$  in Fig. 8) genügte so in hervorragender Weise allen Ansprüchen, solange es sich um die Verstärkung von Frequenzen über 3500 handelte. Für niederere Frequenzen stand ein entsprechender Niederfrequenzverstärker zur Verfügung.

1) Ausgearbeitet im Laboratorium K im Sommer 1917 als erstes Modell von Siemens & Halske.





Die genaue Größe der Verstärkung interessierte, wie ersichtlich, im vorliegenden Falle nicht. Dagegen mußte die dämpfende Eingangsimpedanz in ihrer Abhängigkeit von der Frequenz gemessen werden. In Tab. 7 sind die Ergebnisse zusammengestellt. Die Werte bei  $\omega = 1500$  und  $2400$  sind an dem Niederfrequenzverstärker gemessen. Naturgemäß enthält die Eingangsimpedanz neben dem Wattwiderstand  $R_k$  auch Kapazität  $C_k$ .

Tabelle 7.

$\omega$	$R_k$	$C_k$
1500	$4,9 \cdot 10^5 \Omega$	$6,7 \cdot 10^{-10} \text{ F}$
2400	4,2	5,8
3500	5,4	3,3
5000	5,4	3,4
7000	5,2	3,2
9400	5,0	3,1
12000	4,9	3,0
15000	4,4	3,0

#### 4. Der Zusammenbau.

§ 1. Es bleibt nun noch die Beschreibung des Zusammenbaues der Meßanordnung für die Bestimmung von  $\varepsilon$ . Fig. 8 zeigt das Schema derjenigen Schaltung, die bei der ersten

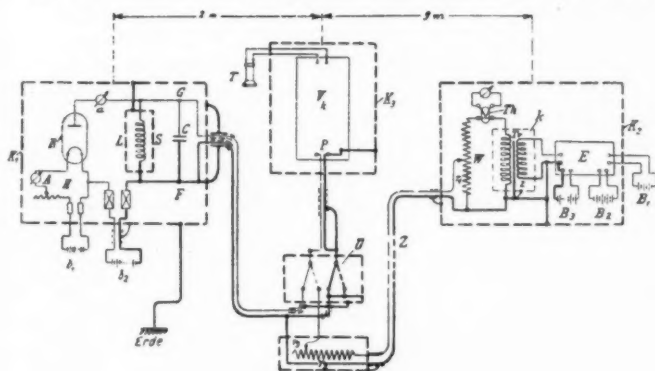


Fig. 8.

Methode der Messung des Elementarquantums in Anwendung kam. In einem Kasten  $K_1$  befanden sich das Rohr  $R$  samt Heizapparatur  $H$  und der beschriebene Schwingungskreis  $S$ .

In einer Entfernung von etwa 9 m befand sich die gleichfalls bereits erwähnte Erregerschaltung  $E$ . Ihre Verbrauchsklemmen waren unter Zwischenschaltung eines Transformators  $Tr$  mit einem Stöpselwiderstand  $W$  verbunden. In Reihe mit  $W$  lag ein mit Gleichstrom geichtetes Vakuum-

Thermoelement  $Th$  für maximal 15 Milliamp. Der Transformator  $Tr$  war durch die Kappe  $k$  geschützt und besaß einen geschlitzten Zinkzylinder  $z$  als Zwischenlage zwischen den beiden gleichen Wicklungen. Dieser sollte Aufladungserscheinungen unterbinden und war zu diesem Zwecke gleichfalls mit  $K_1$  verbunden. Dasselbe geschah mit dem Anfang des Widerstandes  $W$ .

Von den Enden von  $r_1$ , einem Teil von  $W$ , aus führte die bereits bei der Bestimmung des Röhrenwiderstandes erwähnte metallumklöppelte Leitung  $Z$  zu einem zweiten Stöpselwiderstand  $r_2$ . Mittels eines Umschalters  $U$  konnte man nun einmal die Punkte  $F$  und  $G$  des Schwingungskreises  $S$  über zwei eindrige Bleikabel, deren Mäntel mit  $K_1$  verbunden waren, das andere Mal die Enden eines Teiles  $r_3$  des Widerstandes  $r_2$  mit den Primärklemmen  $P$  des Verstärkers  $V_k$ , der in seinem Schutzgehäuse  $K_3$  stand, verbinden. Verstärker und Umschalter befanden sich in etwa 2 m Abstand von der Schroteffektschaltung. Alle Schutzvorrichtungen waren miteinander verbunden und an Erde gelegt (in Fig. 8 stark ausgezogen). Man erkennt, daß sowohl in der Schroteffekt- wie in der Erregerschaltung die Klemmen + 200 Volt geerdet, und daß die von ihnen ausgehenden Leitungen ständig miteinander verbunden sind. Diese Maßnahme ist wesentlich für die Störungsfreiheit, da sie Kapazitäten gegen Erde ausschließt.

§ 2. Die Schutzmaßnahmen wurden auch durch folgende weiteren Umstände notwendig gemacht. Erstens streute die Erregerschaltung und induzierte die mit den Primärklemmen  $P$  des Verstärkers verbundenen Leitungssysteme. Zweitens trat leicht Rückkoppelung zwischen Verstärker und Schwingungskreis ein. Der Erfolg war das sogenannte Pfeifen der Schaltung. Ein Kriterium für die volle Beseitigung der ersten Störungsursache war folgendes: Man schaltete Erregerschaltung und Verstärker ein. Dann mußte sowohl für  $r_1 = W$  und  $r_3 = 0$  als auch für  $r_1 = 0$  und  $r_3 = r_2$  vollkommene Tonstille im Telefon  $T$  bestehen. Maßgeblich für die Beseitigung der zweiten Störungsursache war, wenn bei ausgeschaltetem Rohr  $R$  und mit den Klemmen  $P$  verbundenem Schwingungskreis  $S$  gleichfalls Tonstille im Telefon herrschte. Hörte man in diesem Falle einen Schwankungston, so rührte er von dem ersten Rohre der Verstärkerkaskade her, das nicht völlig entgast war

und einen Gitterstrom besaß. Durch entsprechende Auswahl dieses Rohres ließ sich die Störung beseitigen.

Man kann sich auch noch folgendermaßen von der Frequenzunabhängigkeit der Anordnung überzeugen: Man legt den Widerstand  $r_3$  einmal an Rohr  $R$  + Schwingungskreis  $S$  und einmal an diesen allein. Der Verstärker  $V_k$  ist auf den Schwingungskreis geschaltet. Nun reguliert man  $r_3$  mittels des Laufstöpsels so, daß ein an den Verstärker angeschlossener Gleichrichter in beiden Fällen gleichen Ausschlag zeigt, was auf gleiche Spannung am Schwingungskreis deutet. Man macht dies für eine Reihe von Frequenzen. Dann müssen sich unter sonst gleichen Umständen die Werte  $r_3$  wie die Widerstände verhalten. Die Übereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Werten war im vorliegenden Falle eine sehr gute.

Durch den vorangegangenen Teil ist wohl zur Genüge dargetan worden, daß Fehler der Apparatur nach Berücksichtigung der aufgedeckten Frequenzabhängigkeiten zur Erklärung des Effektes der scheinbar zu kleinen Elementarquanten nicht herangezogen werden können. Aber selbst, wenn noch kleine Fehler wie geringfügige Erdkapazitäten z. B. oder Kapazitäten der Zuleitungen unberücksichtigt vorhanden sein sollten, so erkennt man sofort, daß dies nur einen  $\varepsilon$  vergrößernden Einfluß ausüben könnte. Diese Fehler kämen aber auch schon deswegen nicht in Frage, weil sie ja einer gegenüber dem Fehler in den  $\varepsilon$ -Werten verschwindenden Größenordnung angehören müßten. Der Effekt muß deshalb eine innere Ursache haben.

### III. Die Messungen von $\varepsilon$ im Hinblick auf etwaige innere Ursachen.

#### 1. Berücksichtigung der Rückwirkung des Kreises auf das Rohr.

Bevor die Meßmethoden für  $\varepsilon$  und ihre genaueren Ergebnisse aufgeführt werden, soll noch ein weiterer Schluß aus dem vorangegangenen Teil gezogen werden. Ein Vergleich der nunmehr bekannten Konstanten der Meßanordnung, besonders von  $R_i$  und  $Z_0$  (Tabellen 2 bis 4 und 6, es ist nicht  $R_i > Z_0$ ) lehrt, daß nicht mit der vereinfachenden Voraussetzung von W. Schottky gerechnet werden darf, nämlich, daß der Strom nicht durch die Spannungsschwankungen rückbeeinflußt wird,

welche die im Kreise  $S$  erzeugte Schwingung an den Elektroden des Rohres  $R$  hervorruft. Nur für diesen idealisierten Fall gilt die eingangs niedergeschriebene Gleichung

$$C = \sqrt{\epsilon_0 \omega_0 \epsilon}.$$

Das Ergebnis für den allgemeinen Fall ist bereits bei W. Schottky (a. a. O., S. 564) angedeutet. Angenommen, man hätte allgemein die Stromschwankungen  $C'$ . Dann ist jedenfalls nach dem Vorstehenden

$$C = \lim_{Z_0'/R_i = 0} C'.$$

Nun werde vorübergehend die elektromotorische Kraft  $E$  des Schroteffektes eingeführt. Es sei:

$$(5) \quad E = C' (R_i + Z_0').$$

Geht man nach Division durch  $R_i$  zur Grenze über, so wird

$$\lim_{Z_0'/R_i = 0} \left( C' + \frac{Z_0'}{R_i} \right) = \lim_{Z_0'/R_i = 0} \frac{E}{R_i}$$

oder

$$(6) \quad C = \frac{E}{R_i}.$$

Ein Vergleich der Gleichungen (5) und (6) liefert

$$(7) \quad C = C' \frac{R_i + Z_0'}{R_i}.$$

Hierin hat laut Definition  $Z_0'$  den Wert

$$(8) \quad Z_0' = \frac{Z_0 R_k}{Z_0 + R_k},$$

wo  $R_k$  für die verschiedenen Frequenzen die Werte der Tab. 7 annimmt. Gleichung (7) stellt also die Korrektur dar, die beim Übergang von allen praktischen zu dem idealisierten Fall in Anwendung zu kommen hat.

## 2. Die Meßmethoden.

a) Die Methode der direkten Tonvergleichung, wie sie zu den ersten Messungen benutzt worden war.

b) Die Methode der Substitution der Schroteffekt-E.M.K. durch eine bekannte Wechselspannung unter sonst gleichen Verhältnissen.

b) ist nur als Probe auf (a) anzusehen.

§ 1. Zunächst werde die erste Methode betrachtet. Für sie gilt das Schaltbild der Fig. 8 ohne Abänderungen. Sie beruht auf der Bestimmung der Spannungsschwankungen  $V'$  am Schwingungskreise  $S$ . Es muß, da tatsächlich die Voraussetzung

des idealisierten Falles nicht erfüllt ist, statt  $V$  wie in Gleichung (1)  $V'$  heißen. Es ist  $V' = C' Z_0'$ .

Ersetzt man  $C'$  hierin nach Gleichung (7), so ergibt sich

$$(9) \quad C = V' \frac{R_i + Z_0'}{R_i Z_0'} = \frac{V'}{Z'}.$$

$Z'$  ist hierbei offenbar der Verzweigungswiderstand der Parallelschaltung von Rohr, Schwingungskreis und Verstärker. Das Rohr verhält sich in bezug auf den Schwingungskreis nicht anders als der Verstärker, nämlich dämpfend, wobei sich seine Kapazität zu der des Schwingungskreises addiert. Das Rohr dämpft den Schwingungskreis natürlich desto mehr, je größer  $Z_0'/R_i$  ist. Gleichung (9) stellt also die nachträgliche Rechtfertigung für die Überlegungen des vorigen Teiles anlässlich der Auswahl der Selbstinduktion des Schwingungskreises und der Bestimmung von  $R_i$  dar. Für  $\varepsilon$  ergibt sich nun in Analogie zu Gleichung (1) die allgemeingültige Formel

$$(10) \quad \varepsilon = \frac{V'^2}{i_0 \omega_0 Z'^2}.$$

Gemäß den Gleichungen (8) und (9) wurde nun  $Z'$  aus  $R_i$ ,  $Z_0$  und  $R_k$  für die Frequenzen 1500, 2400 einerseits, bei denen der Niederfrequenzverstärker benutzt wurde, und 3500, 5000, 7000, 9400, 12000 und 15000 andererseits, bei denen der Sprechfrequenzverstärker in Anwendung kam, mit Hilfe der Fig. 4 und der Tabellen 6 und 7 berechnet. Das Ergebnis ist für zwei Werte von  $i_0$  in Tab. 8 vereinigt. Da die Messung von  $\varepsilon$  nach der ersten Methode bei mehr als acht Frequenzen vorgenommen wurde, so mußten bei den übrigen die Werte für  $Z'$  durch graphische Interpolation gewonnen werden.

Die ersten Versuche hatten nun bereits wahrscheinlich ge-

Tabelle 8.

$\omega_0$	$Z'$	
	$i_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ A}$	$i_0 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ A}$
1500	$0,121 \cdot 10^5 \Omega$	$0,110 \cdot 10^5 \Omega$
2400	0,306	0,241
3500	0,645	0,414
5000	0,864	0,495
7000	1,10	0,562
9400	1,23	0,598
12000	1,32	0,615
15000	1,35	0,622

macht, daß  $\varepsilon$  mit kleiner werdendem Sättigungsstrom  $i_0$  anwuchs, doch lagen damals infolge der zu geringen Genauigkeit die Abweichungen innerhalb der Fehlergrenze. Jetzt, wo die Ionisationseffekte fehlten, war  $i_0$  eine obere Grenze nur durch

die wachsende Dämpfung des Kreises  $S$  infolge abnehmenden Rohrwiderstandes gesetzt, die den Toncharakter bei wachsendem  $i_0$  mehr und mehr verwischte. Die untere Grenze war durch das rapide Anwachsen von  $R_t$  und die damit verbundenen Einstellschwierigkeiten mit kleiner werdendem  $i_0$  sowie die große Lautschwäche gegeben. Die nicht zu vermeidende zeitliche Inkonstanz von  $i_0$  gerade bei dunkelbrennendem Rohr, die wohl auf Verunreinigung der  $W$ -Kathode durch  $Th$  zurückzuführen ist, hätte infolge des großen  $\left| \frac{\partial R_t}{\partial i_0} \right|$  die Meßgenauigkeit für kleine  $i_0$  noch weiter verschlechtert. Auf Grund dieser Betrachtung wurden schließlich bei jeder Frequenz hintereinander eine Messung bei  $i_0 = 20$  Milliamp. und eine zweite bei  $i_0 = 2$  Milliamp. gemacht.

Jede Messung dieser Doppelreihe bestand aus drei Beobachtungen, die sich durch die verschiedenen Werte des den Widerstand  $r_1$  (vgl. Fig. 8) durchfließenden Stromes  $i$ , die durch Ändern von  $W$  gewonnen wurden, unterschieden. Vor jeder Beobachtung wurde die Frequenz nachgeprüft.  $r_3$  wurde nun solange variiert, bis im Telephon  $T$  Tongleichheit vorhanden war.

Unter der Voraussetzung, daß  $r_2 \gg r_1$  und  $r_2 \gg r_3$  war, wurde bei Tongleichheit die gesuchte Spannung einfach

$$(11) \quad V = i r_1 \frac{r_2}{r_3}.$$

Im ganzen wurde bei 17 verschiedenen Frequenzen gemessen. Die Beobachtungen erstreckten sich naturgemäß über eine Reihe von Wochen. Es konnte dabei festgestellt werden, daß die an verschiedenen Tagen bei derselben Frequenz gemessenen Werte innerhalb der hiernach zu besprechenden Fehlergrenze gut übereinstimmten. Die Ergebnisse aller Messungen sind in Tab. 9 zusammengestellt und werden durch die Fig. 9 veranschaulicht. Man erkennt die mit kleiner werdendem  $\omega_0$  steigende Tendenz von  $\varepsilon$ . Ferner liegen die Werte für  $i_0 = 20$  Milliamp. fast sämtlich unterhalb derjenigen für  $i_0 = 2$  Milliamp. Außerdem aber zeigt die Kurve deutliche Minima in der Gegend von  $\omega_0 = 4000$  und  $10000$  und ein Maximum bei etwa  $\omega_0 = 5000$ .

Sind diese Extrema nun reell? Zur Beantwortung dieser Frage muß ein Blick auf die Genauigkeit der Messungen geworfen werden. Unter sonst gleichen Bedingungen kann man

Tabelle 9.

$\omega_0$	$i_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ A}$			$i_0 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ A}$		
	$V' \cdot 10^6 \text{ V}$	$Z' \cdot 10^{-5} \Omega$	$\varepsilon \cdot 10^{22} \text{ Cb}$	$V' \cdot 10^6 \text{ V}$	$Z' \cdot 10^{-5} \Omega$	$\varepsilon \cdot 10^{22} \text{ Cb}$
1500	1,2	0,12	33	3,1	0,11	27
2400	2,9	0,31	18,5	6,8	0,24	16,7
3000	3,5	0,53	7,3	7,6	0,38	6,7
3200	3,3	0,58	5,1	7,1	0,40	4,9
3500	3,1	0,65	3,3	6,3	0,41	3,3
4000	3,9	0,73	3,6	7,1	0,44	3,2
4500	5,1	0,80	4,6	8,1	0,47	2,8
5000	7,1	0,86	6,7	12,1	0,50	5,8
6000	8,3	1,00	5,7	12,3	0,54	4,4
7000	7,4	1,10	3,2	11,7	0,56	3,2
8170	6,3	1,18	1,8	7,6	0,58	1,1
9400	8,0	1,24	2,2	9,6	0,60	1,4
10000	10,2	1,28	3,2	10,9	0,60	1,7
10700	8,7	1,29	2,1	8,7	0,61	1,0
12000	10,5	1,32	2,7	14,0	0,62	2,1
14000	13,7	1,34	3,7	11,6	0,62	1,3
15000	19,2	1,35	6,7	24,0	0,64	4,5

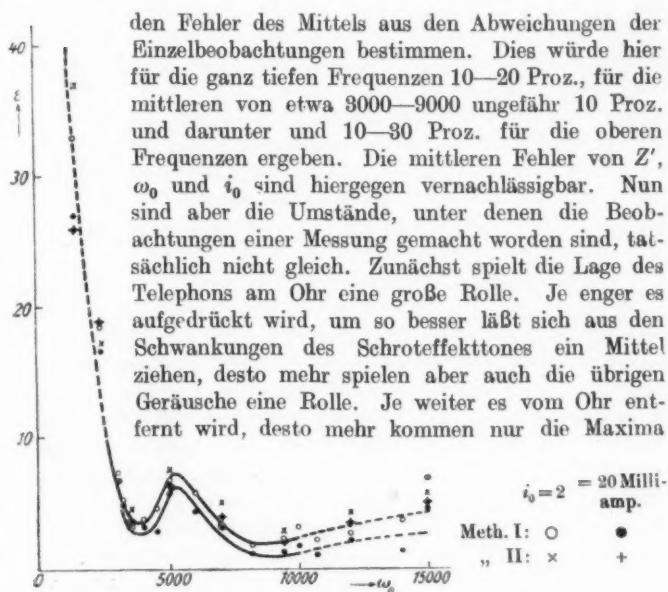


Fig. 9.

der Schwankungen zu Gehör, desto größer wird  $V'$  gewählt, desto größer wird dann  $\varepsilon$ . Versuche zeigten, daß sich durch verschiedene Telephonhaltung bei  $\omega_0 = 15000$  z. B. der mittlere Fehler auf 50 Proz. und mehr erhöhen kann. Da es bei den höheren Frequenzen ganz unmöglich war, bei angedrücktem Hörer überhaupt einen Ton zu unterscheiden — der Schwingungston ging so in den Geräuschen auf — so konnte hier das Telephon nur leicht aufgelegt werden. Bei allen übrigen Frequenzen mußte dann mit der gleichen Telephonhaltung gemessen werden. Als weitere subjektive Fehlerquellen kommen Ablenkung durch Lärm und die schnell eintretende Ermüdung in Frage. Die Messungen wurden deshalb sämtlich nur bei vollkommener Stille ausgeführt, d. h. abends, und im allgemeinen wurden nicht mehr als 10 Einzelbeobachtungen hintereinander gemacht. Der mittlere Fehler mit Berücksichtigung aller Begleitumstände wäre demnach bei den beiden tiefsten Frequenzen auf  $\pm 10$ –30 Proz., bei den mittleren auf etwa  $\pm 10$  Proz., bei den Frequenzen 10000–12000 auf  $\pm 20$ –30 Proz. und bei noch höheren Frequenzen auf 30 bis 50 Proz. festzusetzen. Im allgemeinen war bei  $r_0 = 2$  Milliamp. wegen der geringeren Dämpfung des Kreises die Genauigkeit eine etwas größere. Den angeführten extremen Werten der Kurve würde demnach eine reelle Existenz nicht abzusprechen sein. Die in der vorliegenden Arbeit zur Anwendung gelangenden Methoden gestatten leider nicht, in den außerhalb des Bereichs 3000–10000 liegenden Gebieten den genaueren Verlauf der Kurve zu untersuchen.

§ 2. Wenn die aufgeführten Ergebnisse auch ziemlich fest zu stehen schienen, so war eine Probe durch eine zweite anders geartete Methode dennoch erwünscht. Die dem Schroteffekt untergeschobene elektromotorische Kraft  $E$  wurde durch eine bekannte Spannung  $S$  ersetzt, welche wieder die Erregerschaltung lieferte. Natürlich mußte der innere Widerstand  $R_i$  der Schroteffekt-E.M.K. durch einen Ohmschen Widerstand ersetzt werden. Die Schaltung, welche die Fig. 10 zeigt, gestattete, diese Substitution mit einem Handgriff vorzunehmen. Die einzelnen Buchstaben haben die gleiche Bedeutung wie in Fig. 8. Auch sonst lagen die gleichen Verhältnisse wie dort vor. Nur wurde der Widerstand  $r_2$  samt den Zuleitungen von der Erregerschaltung in den Eisenkasten  $K_1$  verlegt. Der



Verstärker  $V_k$  lag dauernd am Schwingungskreise. Dieser wurde nun zunächst mit der eingestellten Frequenz der Erregerschaltung in Resonanz gebracht. Durch wiederholtes Umschalten mittels des Schalters  $U$  wurde dann auf Tongleichheit im Telefon eingestellt. Dies konnte wieder durch geeignete Bemessung von  $r_3$  erreicht werden. Es war somit  $E = S$  (falls der Ohmsche Widerstand  $M =$  dem Rohrwiderstand  $R_i$  war). Nach Gleichung (6) wird dann

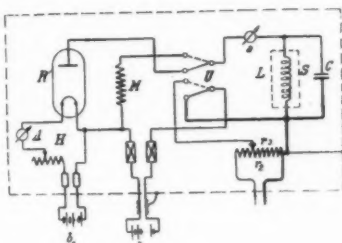


Fig. 10.

$$(12) \quad C = \frac{S}{R_i}.$$

$S$  erhielt man analog  $V'$  nach Gleichung (11).

Um die durch verschiedene Umstände herabgesetzte Genauigkeit der Methode nicht gar zu klein werden zu lassen, wurden für jeden Kurvenpunkt 9 Beobachtungen gemacht. Da es sich aber um eine reine Kontrollmessung handelte, so geschah dieses nur für die Frequenzen 1500, 2400, 3500, 7000, 9400, 12000 und 15000. Die Ergebnisse sind in Tab. 10 vereinigt. Sie sind als Kreuzchen in Fig. 9 eingetragen. Die Werte

Tabelle 10.

$\omega_0$	$i_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ A}$		$i_0 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ A}$	
	$S \cdot 10^6 \text{ V}$	$\epsilon \cdot 10^{22} \text{ Cb}$	$S \cdot 10^6 \text{ V}$	$\epsilon \cdot 10^{22} \text{ Cb}$
1500	111	37	29	26
2400	95	17	31	18,8
3500	60	1,6	16	3,7
5000	91	7,4	26	6,3
7000	89	5,0	24	3,8
9400	73	2,5	20	2,0
12000	98	3,6	29	3,4
15000	133	5,2	40	4,8

sind im ganzen etwas größer als die mit der ersten Methode gewonnenen. Dies rührt wohl daher, daß es ganz unmöglich war, während des Umschaltens das knackende Telefon dicht am Ohr zu halten. Die Übereinstimmung ist aber — auch bezüglich der Werte bei den verschiedenen Sättigungsströmen —

so gut, daß die ersten Messungen in ihrem ganzen Umfang als bestätigt gelten dürfen.

#### IV. Anschließende Überlegungen.

Der Effekt ist bisher stets als ein scheinbarer angesprochen worden, ohne daß irgendein Grund hierfür angegeben worden ist. Dies ist auch ohne weiteres nicht möglich. Es soll nun wenigstens gezeigt werden, daß man mit der Mehrzahl der vorangegangenen Bestimmungen des Elementarquantums qualitativ im Einklang bleiben kann, wenn man dem Effekt eine im Vorgange der Emission liegende Ursache zuschreibt.

##### Die scheinbaren Unterquanten ein thermischer Effekt.

§ 1. Es soll zunächst die bemerkenswerte Tatsache ins Auge gefaßt werden, daß die Kurve  $\epsilon(\omega_0)$  für  $i_0 = 20$  Milliamp. unterhalb der für  $i_0 = 2$  Milliamp. aufgenommenen zu verlaufen scheint. Eine absolute Sicherheit hierüber geben die Messungen wohl nicht, da die Differenzen zweier bei verschiedenen Sättigungsströmen, aber gleichen Frequenzen beobachteten Werte in der Nähe der an sich nur mit einer gewissen Genauigkeit angebbaren Fehlergrenze liegen. Der Umstand indessen, daß der Effekt für fast alle Frequenzen bei beiden Methoden beobachtet wurde, ist doch eine starke Stütze für sein tatsächliches Vorhandensein. Es sei mithin der Schluß gestattet, daß der Emissionsvorgang als solcher zum Zustandekommen des scheinbaren Unterquanteneffektes einen großen Teil beitragen muß.

W. Schottky verdanke ich nun den Hinweis auf die Möglichkeit, daß eine Hauptvoraussetzung seiner Arbeit nicht zutrifft, nämlich die zeitliche Unabhängigkeit zweier beliebiger Elektronenübergänge voneinander (a. a. O., S. 550). Es soll versucht werden zu zeigen, daß diese Möglichkeit einen gewissen Grad von Wahrscheinlichkeit besitzt. Im Folgenden schließe ich mich den betreffenden mir brieflich von W. Schottky mitgeteilten Ausführungen an, die mit meinen eigenen inhaltlich im wesentlichen übereinstimmen. Ein aus dem Faden austretendes Elektron hat bekanntlich eine bestimmte Arbeit  $W$  zu leisten, die im allgemeinen als von der Temperatur unabhängig angenommen werden kann (vgl. W. Schottky, Bericht über thermische Elektronenemission, *Jahrb. d. Rad. u. Elektr.* 12, S. 147. 1915). Hierbei tritt eine Absorption von Wärme ein, die einen lokalen Temperatursturz

zur Folge hat. Es vergeht nun eine gewisse Zeit, bis im Mittel jene Stelle wieder emissionsfähig ist. Ist diese Zeit so groß, daß gemäß der mittleren Strommenge der Austritt eines oder mehrerer weiteren Elektronen aus der abgekühlten Stelle noch innerhalb derselben Schwingungsperiode zu erwarten wäre, so wird dieser Austritt weiterer Elektronen durch das Austreten des ersten Elektrons unterbunden, oder wenigstens wird die Zahl dieser Elektronen beeinflußt; man kann also dann nicht mehr von einer Unabhängigkeit der Elementarereignisse sprechen.

Daß nun für die hörbaren Perioden ( $n \sim 1000$ ) eine derartige Nachwirkung vorhanden sein muß, erkennt man aus folgendem.

§ 2. Hört der ganze Elektronenstrom plötzlich auf, so vergeht bei den üblichen Elektronenströmen nach besonderen Beobachtungen im Lab. K eine Zeit von der Größenordnung  $\frac{1}{100}$  Sekunde, bis die neue Temperatur des Fadens merklich<sup>1)</sup> erreicht ist. Es sind also in der Tat bereits unter der günstigsten Annahme gleichmäßiger Stromdichten Nachwirkungen zu erwarten; in noch viel höheren Graden, wenn an einer Stelle des Fadens zufällig eine starke Abkühlung durch gehäuften Austritt von Elektronen stattgefunden hat.

Eine solche Stelle, an der die Temperatur unter einen gewissen Wert gesunken ist, wird zur Emission untauglich. Dies Gebiet ist zu allererst noch klein, wird nach einer bestimmten Zeit am größten und wird dann wegen der neuzugeführten Wärme rasch wieder kleiner. Zu versuchen ist, ob durch einen solchen Vorgang eine gegenseitige Abhängigkeit der Elektronenemission innerhalb der Periode  $\tau$  der beobachteten Schwingung bedingt sein kann. Hierzu ist zweierlei zu berücksichtigen: Erstens die Größe  $g$  des „sterilen“ Gebietes nach der Zeit  $\tau$  und zweitens die mittlere Fläche  $f$ , auf der innerhalb der Zeit  $\tau$  ein Elektron ausgesendet wird.  $f$  wächst dauernd mit der Frequenz,  $g$  wächst mit der Frequenz zunächst von einem kleinen Anfangswert aus, erreicht ein Maximum und nimmt

---

1) D. h. so, daß der dieser Temperatur entsprechende (hypothetische) Sättigungsstrom nicht mehr als Bruchteile von Prozenten von dem endgültigen (hypothetischen) Sättigungsstrom abweichen würde.

dann wieder ab.<sup>1)</sup> Für ganz große Frequenzen ist  $f$  sehr groß gegen  $g$ , also völlig Unabhängigkeit vorhanden.  $\varepsilon$  muß seinen wahren Wert zeigen. Bei etwas kleineren Frequenzen wächst  $g$ ,  $f$  nimmt ab; es beginnt eine teilweise und dann immer stärkere Abhängigkeit der benachbarten Elektronenemission von irgendeiner primär aufgetretenen.  $\varepsilon$  wird also scheinbar verändert.

Ähnlich ist es, wenn wir von ganz langsamen Frequenzen ausgehen.  $g$  ist dann innerhalb einer Periode längst auf den Wert 0 abgeklungen;  $f$  wird allerdings auch dauernd kleiner, aber nur proportional  $\tau$ , wohingegen  $g$  während des überwiegenden Teiles der Periode gleich Null ist. Daher ist auch bei beliebig kleinem  $f$  keine Abhängigkeit mehr vorhanden.  $\varepsilon$  muß seinen richtigen Wert zeigen.

Im Zwischengebiet ist die Sache komplizierter. Es ist hier nämlich neben der ungünstigen Beeinflussung des Effektes durch die „Sterilisierung“ gewisser Teile der Oberfläche auch eine günstige Beeinflussung der Schwankungen möglich, nämlich in dem Fall, wo das sterile Gebiet gerade nach  $1/2$ ,  $3/2$  Perioden usw. sein Maximum erreicht hat. Dann wird offenbar die Schwankung durch verstärktes Auftreten der Sinusglieder der betreffenden Periode wieder teilweise vergrößert. Es müßte also zunächst ein Minimum auftreten in dem Fall, wo  $g$  gerade nach einer viertel Periode seinen größten Wert hat, dann ein Maximum, wenn dies nach einer halben Periode der Fall ist, dann ein vermutlich weniger ausgeprägtes Minimum, falls  $g$  nach  $3/4$  Periode sein Maximum hat, und so müßten mit zunehmender Frequenz noch mehrere, wahrscheinlich immer weniger ausgeprägte Maxima und Minima einander folgen, bis die ganze Sache durch das starke Anwachsen des  $f$ -Gebietes überdeckt würde.

§ 3. Die Frequenzabhängigkeit der Minima müßte unabhängig von der Stromstärke sein, da sie ja nur von dem Verhältnis der Zeit  $\vartheta$ , in der  $g$  seinen Maximalwert erreicht, zu der Periode  $\tau$  der benutzten Schwingung abhängt.

Verkleinerung der Stromstärke bedeutet Anwachsen der  $f$ -Werte bei gegebener Frequenz, während die  $g$ -Werte dieselben

1) Denn  $g$  erreicht mit wachsender Zeit, von dem Emissionsmoment aus gerechnet, zunächst ein Maximum, um dann wieder abzunehmen, da eine solche Funktion für  $t$  und  $1/t$  qualitativ symmetrisch ist, gilt qualitativ dasselbe auch für die Abhängigkeit von  $\nu = 1/\tau$ .

bleiben; es bleiben dann immer größere Teile der Fläche  $f$ , innerhalb deren die wahrscheinlichen nächsten Emissionen in der Nachbarschaft eines betrachteten Emissionselektrons stattfinden, von dem Sterilisierungsvorgang unberührt, und schließlich muß, bei ganz kleinen Stromwerten, für alle Frequenzen wieder der richtige  $\varepsilon$ -Wert gemessen werden.

Zur Bestätigung dieser Vermutungen bedarf es natürlich noch der Untersuchung des in der vorliegenden Arbeit gekennzeichneten Effektes in anderen Frequenzbereichen, die W. Schottky und der Verfasser schon in einer Vornotiz (W. Schottky und C. A. Hartmann, Zeitschr. f. Phys. 2. S. 206. 1920) als wünschenswert bezeichnet haben.

#### **Zusammenfassung.**

1. Die Untersuchung des Schroteffektes gibt Anlaß zur Entdeckung von scheinbaren Unterquanten, deren Größe im allgemeinen mit wachsender Frequenz abnimmt. Sie sind indessen größer, als sie sich unter Zugrundelegung des reinen Wärmeeffektes ergeben würden.

2. Durch die Untersuchung der Meßanordnung wird erwiesen, daß die Ursache dieses Effektes keine äußere sein kann. Die Hauptbestandteile der Apparatur zeigen folgende auf den Effekt bezügliche Eigenschaften:

a) Der innere Widerstand des Rohres ist unabhängig von der Frequenz, dagegen stark abhängig vom Sättigungsstrom. Das Rohr zeigt Kapazität, die mit dem Sättigungsstrom wächst.

b) Der Dämpfungswiderstand des Schwingungskreises ist von der Frequenz stark, die Selbstinduktion nur wenig abhängig. Von dem die Spule durchfließenden Gleichstrome sind beide innerhalb gewisser Grenzen und unter geeigneten Bedingungen fast unabhängig.

3. Es wird die Korrektur angegeben, die beim Übergang von dem Fall endlichen Verhältnisses von Rohrwiderstand zu Impedanz des Schwingungskreises zu dem Fall, wo dieses Verhältnis Null wird — es ist der von W. Schottky betrachtete — notwendig ist.

4. Bei genauerer Betrachtung zeigt die Funktion  $\varepsilon(\omega_0)$  Extrema, von denen gezeigt wird, daß sie nicht auf Meßfehlern beruhen.

5. Es wird wahrscheinlich gemacht, daß der scheinbare Unterquanteneffekt eine Funktion des Sättigungsstromes ist.

6. Als qualitative Erklärung für den Effekt und seine Eigenschaften wird die thermische Trägheit der Glühkathode und eine Beeinflussung des Wärmezustandes an ihrer Oberfläche durch ein eben ausgetretenes Elektron angegeben. Die Schottkysche Annahme „unabhängiger Elementarereignisse“ gilt also bei den benutzten Sättigungsströmen nicht. Die scheinbare Rohrkapazität wird ebenfalls auf thermische Trägheit zurückgeführt.

Die vorstehende Arbeit wurde im K-Laboratorium des Wernerwerks der Firma Siemens & Halske A.-G. ausgeführt. Ich bin seinen Leitern, besonders dem Leiter der Abteilung, Hrn. Dr. Ebeling, sowie Hrn. Dr. Thürmel wegen der großen Bereitwilligkeit, mit der sie die beträchtlichen Mittel zur Ausführung der Arbeit zur Verfügung stellten, zu wärmstem Danke verpflichtet. Vor allem sage ich aber Hrn. Privatdozenten Dr. Walter Schottky, der die Anregung zu dieser Arbeit gab, für sein stetes Interesse, das er an ihr genommen hat, und für eine Reihe wertvoller Ratschläge meinen allerherzlichsten Dank.

(Eingegangen 1. Dezember 1920.)

### 5. Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit; von W. Schottky.

Der unzweifelhafte Fortschritt, der in unserer Erkenntnis der Schwankungen bei thermischer Elektronenemission durch die vorstehend skizzierten Untersuchungen Hrn. Hartmanns gewonnen ist, erfordert einige nachträgliche Bemerkungen zu meinen früher (Ann. d. Phys. 57, S. 541—567, 1918) noch *ohne* genauere Kenntnis der wahren experimentellen Tatsachen angestellten Überlegungen.

Zunächst nach der verstärkertechischen Seite hin. Es könnte scheinen, daß durch die nunmehr konstatierte gegenseitige Beeinflussung der Glühelatronen an der Kathodenoberfläche und die dadurch bedingte scheinbare Verkleinerung der Elementarladung die von mir angegebene Grenze für die eben noch wahrnehmbare, d. h. durch den Schroteffekt nicht überdeckte kleinste Signalleistung wenigstens im Gebiet der Tonfrequenzen beträchtlich hinausgeschoben würde. Bei näherem Zusehen ergibt sich aber, daß meine Angaben S. 563 (zwischen  $10^{-17}$  und  $10^{-12}$  Watt, entsprechend der durch Gleichung (15) S. 562 wiedergegebenen Abhängigkeit von den Konstanten des Schwingungskreises und dem Elektronenstrom), zunächst wenigstens, bestehen bleiben. Denn — was damals aus bestimmten Gründen noch nicht gesagt werden konnte — es kommen für die Störung des Signalempfanges durch den Schroteffekt in Verstärkerröhren zwei verschiedene und zufällig in der Größenordnung gleiche Vorgänge in Betracht, von denen nur der *eine* durch die Resultate Hrn. Hartmanns betroffen scheint.

Man hat nämlich mit einem Schroteffekt im Gitter- und Anodenkreis, beim Gitter- und Anodenstrom zu rechnen. Im Gitterkreis ist zwar der Strom — es handelt sich bei Röhren, die oberhalb der Ionisierungsspannung der Restgase arbeiten, um den Ionenstrom, der durch Stoß der Elektronen auf die Restgasmoleküle entsteht — um viele Zehnerpotenzen kleiner als der

zur Anode fließende Elektronenstrom; dafür ist aber der Scheinwiderstand des angeschlossenen Schwingungskreises 10—30 mal größer, und, was wichtiger ist, der Schwankungseffekt im Anodenkreise ist beim Vergleich mit dem im Gitterkreise mit der Leistungsverstärkung, also dem Quadrat der linearen Verstärkung der Röhre zu dividieren, was einen weiteren Faktor zugunsten des Gittereffektes von der Größenordnung 100 bis 10000, je nach der Röhre, ergibt. Der Gesamtfaktor bewegt sich also zwischen  $10^3$  und  $3 \cdot 10^4$ , und gerade das ist auch der Betrag, um den in Hochvakuumröhren mit negativen Gitterpotentialen und über der Ionisierungs- und Anodenpotentials liegenden Anodenpotentialen der Anodenstrom größer zu sein pflegt als der Gitterstrom. (Ein Verhältnis von  $3 \cdot 10^4$  gilt für eine gut entgaste Röhre;  $3 \cdot 10^3$  bedeutet schon ziemlich schlechte Entgasung.) Nach der angezogenen Formel (15) wäre also der Gitter- und der Anodenschroteffekt von der gleichen Größenordnung — falls die Voraussetzungen der Rechnung in beiden Fällen zuträfen, und die gemachte Größenordnungsangabe würde bestehen bleiben, wenn für *einen* der beiden Effekte die gemachten Voraussetzungen zuträfen.

Nun gilt, wie Hr. Hartmann gezeigt hat, für den Elektronenstrom die Annahme der unabhängigen Elementarereignisse nicht. Der Effekt ist im Gebiet der Tonfrequenzen viel kleiner als nach dieser Voraussetzung zu erwarten. Also haben wir zu schließen, daß, wenn für den Gittereffekt die Voraussetzung der unabhängigen Elementarereignisse *zutrifft*, *dieser* im Gebiet der Tonfrequenzen der für den Schroteffekt der Verstärkerrohre maßgebende ist.

Das wäre nun am besten mit absichtlich schlecht entgasten oder schwach gasgefüllten Röhren zu prüfen. Vor der Hand liegt noch kein Grund vor, an der Unabhängigkeit der einzelnen Ionisationsvorgänge voneinander zu zweifeln; freilich wird man auch hier irgendwelche indirekten Rückwirkungen nicht von vornherein ausschließen können. Dieser Effekt wäre also noch zu untersuchen, und es wäre jedenfalls erwünscht, wenn sich *hier* die Bedingungen so wählen ließen, daß an die Berechnung der Elementarladungen zu denken wäre.

Damit komme ich zu der wissenschaftlichen Seite der Sache. Daß unsere Versuche eine Stütze für die Existenz des



Subelektrons darstellen, ist nicht unsere Meinung; eher wird man sie als ein besonderes lehrreiches Beispiel dafür ansehen können, daß man bei der Bestimmung von Elementarkonstanten unter Zuhilfenahme irgendwelcher Gesetze, in die diese Konstanten eingehen, nicht vorsichtig genug sein kann. Hätten wir nicht mehrere Veränderliche des vermuteten Gesetzes zur Verfügung gehabt und einen systematischen Gang der „Konstante“ mit diesen Veränderlichen festgestellt, so wäre in der Tat der Schluß auf einen falschen Wert der „Konstante“ sehr naheliegend gewesen. Doch mag man sich zu den bisherigen Resultaten stellen, wie man wolle, jedenfalls wäre es von großer Bedeutung, wenn man die Variablen so wählen könnte, daß man in einem Gebiet arbeitet, wo kein Gang der „Konstante“ mit der Frequenz usw. mehr vorhanden ist, und das wäre nach dem Deutungsversuch am Schluß der vorstehenden Arbeit entweder das Gebiet der ganz tiefen oder der ganz hohen Frequenzen. Von diesen beiden scheint mir nun das Gebiet der ganz tiefen Frequenzen vorläufig noch als das geeignetere, und es wäre hierbei daran zu denken, den anzuregenden Schwingungskreis, in Form eines besonders ungedämpften Vibrationsgalvanometers, das zugleich als Meßinstrument dient (nach Art des z. B. von Hrn. Hammer in Freiburg benutzten), an das *Ende* der Verstärkeranordnung zu legen.

Eine *rechnerische* Weiterverfolgung der bisher erhaltenen Resultate erscheint mir dagegen bis zu einem gewissen Grade unwissenschaftlich. Denn es handelt sich offenbar um einen recht zusammengesetzten Vorgang, bei dem Wärmeleitung, Strahlung, Abhängigkeit der Elektronenemission von der Temperatur, Wärmekapazität, Austrittsarbeit der Elektronen und vielleicht noch einiges andere neben den eigentlich interessanten atomistischen Fragen (Wärmebewegung in Gebieten, wo die Schwankungen nicht mehr zu vernachlässigen sind) eine Rolle spielen. *Wenn* man über diese Dinge etwas erfahren will, wird man sicher Anordnungen erdenken können, bei denen die einzelnen Unbekannten nicht in so komplizierter Verkettung auftreten, wie bei unserem Problem.

3. Dezember 1920.

(Eingegangen 21. Dezember 1920.)

**6. Über die Dichte, das Brechungsverhältnis und die Dispersion des gasförmigen Stickstoffes bei seiner Siedetemperatur;  
von Erich Gerold.**

(Gekürzte Leipziger Dissertation.)

**Einleitung.**

In einer Arbeit von Augustin<sup>1)</sup> wurde das Brechungsverhältnis der Flüssigkeit gegen das betreffende Gas von der gleichen Temperatur durch den Versuch festgestellt. Zur Gewinnung des wahren Brechungsverhältnisses wurden das Brechungsverhältnis und die Dichte des Gases für seine Siedetemperatur aus einer Dispersionsformel von Scheel<sup>2)</sup> unter Anwendung der Lorenz-Lorentz'schen Refraktionsformel und unter Annahme der Gültigkeit des Gasgesetzes berechnet. Diese bisher nur berechneten Werte zunächst für Stickstoff durch den Versuch zu bestimmen, ist das Ziel vorliegender Arbeit.

**I. Dichtebestimmung.**

Zur Bestimmung der Dichte wird das Auftriebsverfahren benutzt. Es wird angestrebt, die Dichte auf 0,5 pro Mille genau zu bestimmen. Fig. 1 zeigt die Versuchsanordnung.

Die Wage *A* hat bei voller Belastung (20 g) eine Empfindlichkeit von 0,1 mg pro Skalenteil. Sie ist auf einer Marmorplatte befestigt worden. Die Glasplatte *C* bildet die Unterlage und Abdichtung für den aus 0,3 cm dickem Zinkblech gefertigten Wagekasten *F*. Der Senkkörper *G* besteht aus geschmolzenem Quarzglas, weil nach Scheel und Heuse<sup>3)</sup> das

1) H. Augustin, Ann. d. Phys. 46. S. 419. 1915.

2) K. Scheel, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 9. S. 24. 1907.

3) K. Scheel u. W. Heuse, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 16. S. 1. 1914.

Verhalten des Quarzes bei tiefen Temperaturen genau bekannt ist und weil seine Volumenänderung durch Abkühlen auch wegen des kleinen Ausdehnungskoeffizienten aufs geringste beschränkt ist. Ein möglichst großer Rauminhalt für den Senkkörper ist dadurch erreicht worden, daß er in Form einer Hohlkugel von rund 6 cm Durchmesser hergestellt wurde. Der Hohlraum ist luftleer gepumpt, um zu verhindern, daß bei der starken Abkühlung die etwaige Gasfüllung durch ihr Zusammenziehen einen äußeren Überdruck hervorbringen könnte, der eine schwer zu ermittelnde Volumenänderung herbeiführen würde. Der Senkkörper befindet sich in einem Hohlzylinder, der aus zwei Teilen  $H_1$  und  $H_2$  besteht. Dieser ist aus getriebenem Kupferblech von 0,1 cm Stärke gefertigt. Der obere Teil  $H_1$  ist gasdicht in der Glasplatte befestigt. Der untere

Teil  $H_2$  ist unten geschlossen und hat einen etwas größeren Durchmesser. Beide Teile sind 5 cm ineinander geschoben und durch einen 5 cm hohen, 0,4 cm dicken Korkring  $J$  fest miteinander verbunden. Um die Verbindungsstelle der beiden Zylinderteile ist ein Streifen dünner Gummi von einem Pilotballon gewickelt worden. Dadurch wird eine gasdichte Abdichtung erzielt. Die Haken  $K$  sind durch Bindfaden miteinander verbunden, um zu verhindern, daß der untere Teil beim Abkühlen unter Umständen herabfallen könnte.

Als Temperaturbad dient flüssiger Stickstoff, der in einem Dewargefäß  $L$  den Kupferzylinder umgibt. Der den Senkkörper umhüllende Zylinder ist aus Kupfer gewählt worden, damit ein schneller und sicherer Temperatenausgleich zwischen Flüssigkeit außen und Gas innen erreicht wird. Die zwei Zylinderteile sind durch eine die Wärme isolierende Korksicht

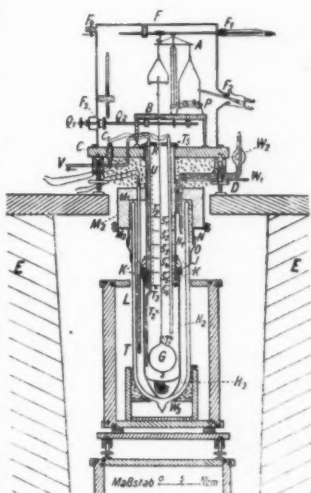


Fig. 1.

voneinander getrennt. Auf diese Weise wird vermieden, daß der Flüssigkeit durch den mit der äußeren Luft in Verbindung stehenden oberen Metallteil ständig soviel Wärme zugeführt wird, daß sie zu stark sieden würde und deshalb immer erneut nachgefüllt werden müßte. Auch wäre wohl der Wagekasten bei zusammenhängendem Kupferteil zu stark abgekühlt worden. Auf diese Weise aber ist die Temperatur im Wagekasten selbst im Laufe einiger Stunden nur um 2—3° gesunken. An dem oberen Zylinderteil ist in geeigneter Höhe der Verschluß des Dewargefäßes angebracht. Er ist von der gleichen Art wie ihn Augustin verwendet hat und wie ihn Lilienfeld<sup>1)</sup> zur Verbindung doppelwandiger Rohre angibt. Der Kunstkorkring  $M_1$ , der ganz streng auf den Kupferzylinder aufpaßt, ist in den Metalltopf  $M_2$  hineingepreßt und kann durch den Metalldeckel  $M_3$  mit Hilfe von Schrauben nachgezogen werden. Der zwischen Glas und Kork bzw. dem an den Metalldeckel  $M_3$  befindlichen Metallring freibleibende Raum  $N$  ist mit Watte voll ausgestopft. Der Verschluß ist eigentlich für das Arbeiten mit Wasserstoff berechnet. Um den Metallring und Glasgefäß wird dann noch ein Gummistreifen  $O$  gelegt, der mit Isolierband und Bindfäden festgemacht ist.

Der Wagekasten  $F$  besitzt in der Vorderwand verschiedene (im Bild nicht mit gezeichnete) gasdicht aufge kittete Glasfenster, um die Gewichte, die Einstellung der Wage, die Stellung des Reiters und ein im Kasten befindliches Thermometer ablesen zu können. Die Reiterverschiebung erfolgt wie bei jedem anderen Wagekasten, nur daß der äußere Teil in einem dünnen Schlauch aus Patentgummi gasdicht hin- und hergeschoben werden kann. Der Schlauch ist an dem Rohrstutzen  $F_1$  des Kastens befestigt. Die Gewichte befinden sich auf einem stufenförmig gebauten Tischchen  $P$ . Der vordere Rand von  $P$  ist kreisförmig ausgeschnitten und paßt sich in Form und Höhe an die rechte Wagschale an. Zum Auflegen und Abnehmen der Gewichte wird ein Zängchen benutzt, das durch einen Gummischlauch gasdicht am Ansatz  $F_2$  des Wagekastens befestigt ist.

Das Feststellen der Wage wird durch eine in der linken

1) J. E. Lilienfeld, Zeitschr. f. kompr. u. flüss. Gase 13. S. 165 1910/11.

Kastenwand bei  $F_3$  durch eine gasdichte Stopfbüchse eingeführte Welle  $Q_1$  betätigt.

Links oben am Kasten ist der Rohrstutzen  $F_4$  angelötet, durch den das zu untersuchende Gas eingeleitet wird.

Um zwischen den einzelnen Wägungen den Nullpunkt der Wage neu bestimmen bzw. nachprüfen zu können, muß der Senkkörper angehängt und wieder entfernt werden können, ohne daß der Wagekasten abgehoben zu werden braucht. Das wird durch eine in der Vorderwand des Kastens eingebaute Vorrichtung erreicht.

Bei den Vorversuchen mit flüssiger Luft traten geringe Schwankungen der Wage auf, die auf Gasströmungen im Zylinder zurückzuführen waren. Um diesen Fehler auszuschalten, ist der Kupferzylinder mit einer Metallplatte  $R$  abgeschlossen worden. In der Mitte hat sie ein Loch von 1 cm Durchmesser, durch das der Aufhängefaden geht. An dieser Platte sind an drei Zwirnfäden sechs Zelluloidscheiben  $S_1 \dots S_6$  wagerecht aufgehängt. Durch diese sind in der Gassäule fünf wagerechte Räume entstanden, die ein Entstehen eines senkrechten Gasstromes verhindern.

Um die Temperaturverteilung im Metallzylinder feststellen und auch einigermaßen verfolgen zu können, sind fünf Thermoelemente  $T_1 \dots T_5$  eingebaut (nur  $T_1$  ist im Bilde gezeichnet, von den anderen sind die Lötstellen durch Kreuze angegeben). Sie befinden sich in Abständen von 1, 5, 8, 18 und 28 cm über dem Senkkörper, einen Zentimeter von der Zylinderwand entfernt. Das Thermoelement  $T_5$  ist auf dem oberen Rand des Zylinders festgelötet. Diese fünf Thermoelemente und noch ein sechstes, das sich in schmelzendem Eis befindet, können einzeln gegen ein anderes Thermoelement  $T$  geschaltet werden, das in die Flüssigkeit im Dewargefäß hineinragt. Alle Thermoelemente sind aus Eisen- und Konstantandraht hergestellt worden. Diese Zusammenstellung Eisen-Konstantan ist gewählt worden, da sie für tiefe Temperaturen noch empfindlich genug ist. Ihre Spannungskurve für diesen Temperaturbereich ist durch Arbeiten von Kamerlingh Onnes und Crommelin<sup>1)</sup> genau bekannt. Die Siedetemperatur der Flüssigkeit

1) H. Kamerlingh Onnes and C. A. Crommelin, Commun. of Leiden 95a.

ergibt sich aus ihrem Dampfdruck nach einer Tabelle von Holst.<sup>1)</sup>

Es ragt in den Zylinder noch ein Glasrohr  $U$  hinein, durch welches die Luft entweichen kann, wenn in dem Wagekasten bei  $F_4$  das zu untersuchende Gas eingeleitet wird.

Bei den Voruntersuchen trat beim Einfüllen der flüssigen Luft eine Leidenfrostsche Erscheinung auf. Mit bestem Erfolg ist dagegen ein Stück Kupfergaze  $H_3$  verwendet worden, das rund um den Boden des Zylinders angelötet ist und bis auf den Boden des Glasgefäßes herabreicht.

Durch den Verschuß des Dewargefäßes führen gasdicht ins Innere außer dem schon erwähnten Thermoelement  $T$  und dem Abdampfrohr  $W_1$  noch ein doppelwandiges Zuführungsrohr  $W_2$  für die Flüssigkeit und ein doppelwandiger Sieder  $W_3$  nach Lilienfeld, um Siedeverzüge und Temperaturschwankungen zu vermeiden (in der Figur ist nur der unterste Teil des Sieders unter dem Kupferzylinder zu sehen).

Der Raum zwischen Verschuß und Glasplatte ist mit Watte ausgefüllt, um eine Kondensation von Wasser in Form von Eis am oberen Zylinderteil und an der Glasplatte zu verhindern.

Da die Flüssigkeit nur als Temperaturbad dient, muß sie nicht unbedingt aus reinem Stickstoff bestehen. Sie kann Beimengungen von Argon und Sauerstoff enthalten, wenn nur ihre Siedetemperatur bestimmt werden kann. Aus einer Arbeit von Holst und Hamburger<sup>2)</sup> kann die Siedepunktserhöhung für beigemengtes Argon, aus einer Arbeit von Baly<sup>3)</sup> bzw. Behn und Kiebitz<sup>4)</sup> die für beigemengten Sauerstoff entnommen werden. Es wurde also atmosphärischer Stickstoff aus Stahlflaschen verflüssigt. Bei den Wägungen ist so verfahren worden, daß in Abständen von einer halben Stunde eine Probe von dem verdampfenden Gas aufgefangen und auf seinen Sauerstoffgehalt hin geprüft worden ist. Zur Sauerstoffbestimmung dient pyrogallussaures Kalium. Der Sauerstoffgehalt hat sich in den bei den Wägungen verflossenen Zeit

1) G. Holst, Commun. of Leiden 148a.

2) G. Holst u. L. Hamburger, Versl. K. Ak. van Wet. 24. S. 798. 1915.

3) E. C. C. Baly, Phil. Mag. 49. S. 517. 1900.

4) U. Behn u. F. Kiebitz, Ann. d. Phys. 12. S. 421. 1903.

nicht geändert. Der Argongehalt ist nicht besonders bestimmt worden. Er wurde nach den Angaben von Holst und Hamburger für atmosphärischen Stickstoff angenommen. Der Wagekasten wird mit möglichst reinem Stickstoff gefüllt. Dieser wird hergestellt nach dem gleichen Verfahren, wie es auch Augustin nach den Angaben von Fischer und Alt bzw. Knorre<sup>1)</sup> angewendet hat. Das Reinigen und Trocknen des Gases geschieht in der von Augustin bereits benutzten Weise. Dann kommt das Gas durch das Rohr  $F_4$  in den Wagekasten. Wenn alles mit Stickstoff gefüllt ist, schließt man das Rohr  $V$ . Das Gas im Wagekasten steht jetzt unter dem Druck des Gasometers, der ungefähr 5 mm Quecksilber beträgt, bis die Temperatur im Kupferzylinder sich nicht mehr ändert. Die Flüssigkeit ist erst dann eingefüllt worden, als der Wagekasten schon mit Stickstoff gefüllt war. Während der Wägungen wird die Leitung vom Gasometer fast ganz geschlossen und an einer Stelle zwischen Verbrennungsröhren und Ausfriergefäßen die Verbindung mit der Atmosphäre durch ein enges Rohr hergestellt. Der vom Gasometer her kommende ganz geringe Gasstrom geht an dieser Stelle ins Freie und verhindert das Eindringen von Luft. Im Wagekasten sind flache Schalen mit Phosphorpentoxyd aufgestellt, die etwa noch vorhandene Feuchtigkeit aufzunehmen.

Die Bestimmung der Dichte geschieht nach folgender Formel:

$$d_G = \frac{a_G}{a_W} \cdot (d_W - d_L) + d_L.$$

Es bezeichnen dabei

- $d_G$  die Dichte des kalten Stickstoffes,
- $d_L$  die Dichte der Luft,
- $d_W$  die Dichte des Wassers,
- $a_G$  den Auftrieb im Gas gegen Luft und
- $a_W$  den Auftrieb im Wasser gegen Luft.

Die Temperatur wird in der thermodynamischen Skala (Nullpunkt bei  $-273,09^\circ \text{C.}$ ) gemessen. Die Temperatur des Gases im Kupferzylinder stimmt mit der Temperatur der Flüssigkeit überein bis auf einen Betrag, der sicher unter  $0,03^\circ$  liegt.

1) K. v. Knorre, Die chem. Industrie 25. S. 531, 550. 1902.

Es sind folgende Werte gefunden worden:

	Dichte	Druck	Temperatur
I	0,0044964	741,10 mm	77,75°
II	0,0044970	741,10 "	77,70°
III	0,0044894	740,11 "	77,69°
IV	0,0044891	739,11 "	77,68°
V	0,0044880	739,11 "	77,77°
VI	0,0044869	739,11 "	77,82°

Aus vorstehender Tafel ist zu ersehen, daß in den Fällen I und II zur höheren Temperatur auch die geringere Dichte gehört. In den Fällen IV, V und VI ist bei gleichem Druck auch der Einfluß der Temperaturzunahme im gleichen Sinne zu bemerken. Nach dem Gasgesetz alle Werte auf 741,10 mm und 77,75° umgerechnet und daraus den Mittelwert genommen, ergibt:

$$d_G = 0,0044973 \pm 17 \cdot 10^{-7}$$

bei 741,10 mm Druck und 77,75°. Das ist eine Genauigkeit von 0,3—0,4 pro Mille.

## II. Brechungsverhältnis und Dispersion.

Zur möglichst genauen Bestimmung der Brechungsverhältnisse von Gasen kommen nur Interferenzverfahren in Frage. Es soll eine Genauigkeit von einem pro mille von  $n - 1$  erreicht werden. Man entschied sich für eine Anordnung nach Mach.<sup>1)</sup> Die von Mach angegebenen Silberspiegel sind durch total reflektierende Prismen ersetzt worden, deren Hypotenusenflächen versilbert sind. Der Interferenzrefraktor ist im hiesigen Institut gebaut worden.

Die Gaskammer, in die das zu untersuchende Gas kommt, muß möglichst vollständig von der als Temperaturbad dienenden Flüssigkeit umgeben sein, doch muß verhindert werden, daß in den Lichtweg des Interferenzrefraktors die dauernd siedende Flüssigkeit mit hineinkommt. Fig. 2 stellt das verwendete Gefäß dar. Es ist zunächst wie ein gewöhnliches doppelwandiges Gefäß gebaut. Am äußeren Glasmantel ist unten ein Rohrstutzen mit aufgeschmolzenem Planglas von 3 mm Dicke angeblasen. Der innere Teil des Dewargefäßes ist nach oben durchgestülpt und ebenfalls mit einem Rohrstück

1) L. Mach, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 12. S. 69. 1892.



mit aufgeschmolzenem Planglas abgeschlossen. An dieses innere Rohr ist ein etwas weiterer Zylinder angeschmolzen, der die eigentliche Gaskammer *A* bildet. Diese ist oben durch einen zylindrischen Teil *B* von 40 cm Länge abgeschlossen, der an beiden Seiten mit planparallelen Deckplatten versehen ist. *C* ist das Vakuum des Dewargefäßes. Der Teil *B* ist auch luftleer gepumpt und bildet das sogenannte Vorvakuum. Die Gaskammer hat von Planplatte zu Planplatte eine Länge von ungefähr 150 mm. Auf der unteren Planplatte steht ein Quarzzylinder *D* von 14 mm innerem und 25 mm äußerem Durchmesser. Seine Länge beträgt ebenfalls rund 150 mm. Am unteren Ende hat er drei angeschliffene Füßchen. Das obere Ende ist plangeschliffen und der Ebene der drei Füßchen parallel. Der zwischen der Oberfläche des Zylinders und der oberen Planplatte verbleibende Zwischenraum von ungefähr  $\frac{1}{2}$  mm Dicke kann jederzeit mit dem Kathetometer auch durch das Dewargefäß und die Flüssigkeit hindurch mit genügender Genauigkeit gemessen werden. Zu diesem Zwecke ist in der Versilberung des Gefäßes ein 2 cm breiter Ring bei *a . . . a* freigelassen worden. Wäre der Quarzzylinder nicht vorhanden, so wäre eine genauere Längenbestimmung der Gaskammer durch das Vakuum des Dewargefäßes hindurch gar nicht möglich oder wenigstens mit großen, nicht berechenbaren Fehlern behaftet. Es wird ein Quarzzylinder gewählt, da für das Quarzglas das Verhalten bei tiefen Temperaturen genau bekannt ist. Das Vorvakuum dient dazu, um den Temperatursprung zwischen Flüssigkeit und Zimmertemperatur zu überbrücken und ein Beschlagen der Deckplatten zu verhindern. Durch das Rohr *E* kann die Gaskammer mit dem zu prüfenden Gas gefüllt bzw. ausgepumpt werden. Der Verschlusssteil für das Gefäß ist ganz ähnlich dem bei der Dichtebestimmung verwendeten. Er besteht auch wieder aus einem Kunstkorkring *F*. Dieser paßt streng in den Metalltopf *G*,

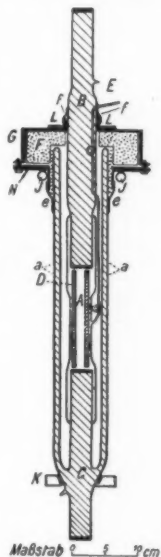


Fig. 2.

am Glasteil *B* liegt er lose an. Er kann durch den Metalldeckel mit Hilfe von Schrauben noch nachgezogen werden. Der Deckel *H* ist auf einem eisernen Ring *J* festgeschraubt, welcher mit einem Stiel und Klemme an einem starken Stativ befestigt ist. Das Glasgefäß ruht auf einem mit Tuchstreifen ausgepolsterten Holzring *K*, der am gleichen Stativ festgemacht ist. Die gasdichte Abdichtung geschieht bei *e* und *f* durch Gummistreifen. Sonstige Hohlräume zwischen Glas und Kork bzw. Metall sind ebenfalls wieder mit Watte ausgestopft worden.

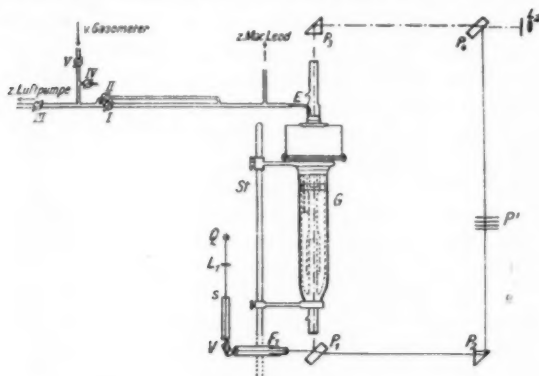


Fig. 3.

Die ganze Anordnung ist in Fig. 3 skizziert. Das von der Lichtquelle *Q* kommende Licht wird durch die Linse *L*<sub>1</sub> auf den Spalt *S* des Vorzerlegungsapparates *V* abgebildet. Die einzelnen Spektrallinien werden durch das Fernrohr *F*<sub>1</sub> auf der Platte *P*<sub>1</sub> des Interferenzrefraktors abgebildet. Das einfarbige Licht wird durch *P*<sub>1</sub> in einen gebrochenen und einen gespiegelten Strahl zerlegt. Durch die Prismen *P*<sub>2</sub> und *P*<sub>3</sub> werden diese Strahlen nach der Platte *P*<sub>4</sub> zu gespiegelt und kommen in dem Raum hinter *P*<sub>4</sub> zur Interferenz. Die Interferenzstreifen werden durch eine Lupe *L*<sub>2</sub> betrachtet. Die Verschiebung wird gegen ein Fadenkreuz gemessen, das so aufgestellt ist, daß es keine Parallaxe gegen die Streifen zeigt. Das Fadenkreuz kann je nach der Richtung der Streifen gedreht werden. Als Lichtquelle dient eine für Längsdurchsicht geeignete Quecksilber- bzw. Kadmium-Quarzlampe. Zur

Messung werden benutzt die Linien Cd rot  $\lambda = 643,9 \mu\mu$ , Hg grün  $\lambda = 546,1 \mu\mu$ , Hg violett  $\lambda = 435,8 \mu\mu$ . Das Gefäß *G* ist an einem starken Stativ *St* festgemacht und befindet sich in dem einen Lichtweg des Interferenzrefraktors. In dem anderen Lichtweg sind den vier Planplatten des Dewargefäßes entsprechend ebenfalls vier Planplatten *P'* von ungefähr der gleichen Dicke eingeschaltet, von denen eine noch um eine wagerechte Achse drehbar ist. Auf diese Weise erhält man Interferenzstreifen von nicht zu hoher Ordnungszahl. An dem Rohr *E* ist gasdicht mit weißem Siegelack angekittet ein Glasrohr von 5 mm Durchmesser, das durch den mit einer weiten Bohrung versehenen Glashahn I abgeschlossen werden kann. Diesem Rohr ist eine Kapillare von 1 mm Durchmesser und 700 mm Länge gleichlaufend geschaltet und mit ihm zusammengeschmolzen. Die Kapillare wird durch den Hahn II abgeschlossen, der eine enge Bohrung hat. Das weitere Rohr hat dann noch eine Verlängerung, die durch den Hahn III verschlossen werden kann, und außerdem noch einen seitlichen Ansatz mit den Hähnen IV und V. Es verschließt III den Weg zur Luftpumpe, IV den Weg zur Atmosphäre und V den Weg zum Gasometer mit dem vorrätigen Gas. Die Hähne I bis V sind so angebracht, daß sie vom Beobachtungsort aus bequem betätigt werden können, ohne daß man die Beobachtung der wandernden Streifen zu unterbrechen braucht. Das Kapillarrohr dient beim Auspumpen bzw. beim Einlassen des Gases bei geschlossenem Hahn I als Widerstand, dessen Abmessungen aus Vorversuchen geeignet festgelegt sind. So wird erreicht, daß die Interferenzstreifen mit einer gleichförmigen, gut beobachtbaren Geschwindigkeit wandern. Durch den Hahn II kann die Wanderungsgeschwindigkeit noch in geringen Grenzen geändert werden. Sind die Interferenzstreifen beim Einlassen oder Auspumpen in dem einen oder anderen Sinne zum Stillstand gebracht, dann wird I noch geöffnet. Durch das weite Rohr stellt sich dann immer ein Druckausgleich her. Die wandernden Streifen werden dadurch gezählt, daß beim Durchgang eines Streifens durch den Schnittpunkt des Fadenkreuzes die Taste eines Morsetelegraphen niedergedrückt wird und der Schreibstift des Apparates auf dem durchlaufenden Papierstreifen einen Strich verzeichnet.

Der flüssige Stickstoff ist eingefüllt worden, während die Gaskammer leergepumpt war.

Die Bestimmung des Brechungsverhältnisses geht nach folgender Formel vor sich:

$$n - n_1 = \frac{s \cdot \lambda}{L}.$$

Es bedeutet  $L$  die Länge der Gaskammer,  $\lambda$  die Wellenlänge des benutzten Lichtes,  $s$  die Zahl der durchgewanderten Streifen und  $n$  bzw.  $n_1$  das Brechungsverhältnis vor bzw. nach der Änderung der Gasdichte. Hier ist im besonderen Falle  $n_1 = 1$  für Vakuum, und es geht die Formel über in

$$n - 1 = \frac{s \cdot \lambda}{L}.$$

Die Versuche haben folgende Streifenverschiebungen ergeben:

Für  $\lambda = 546,1 \mu\mu$ :  $298,4 \pm 0,3$  Streifen  
(Mittelwert aus 5 Werten).

Für  $\lambda = 435,8 \mu\mu$ :  $379,4 \pm 0,2$  Streifen  
(Mittelwert aus 3 Werten).

Für  $\lambda = 643,9 \mu\mu$ :  $251,5 \pm 0,25$  Streifen  
(Mittelwert aus 2 Werten).

Mehr Messungen sind im Rot nicht ausgeführt worden, da die Kadmiumlampe entzwei ging.

Die Länge der Gaskammer ist auf folgende Weise bestimmt worden. Die Länge des Quarzzylinders wurde mit dem Kathetometer zu 149,92 mm gemessen, ehe er in das Glasgefäß eingebaut wurde. Der Zylinder erfährt durch die Abkühlung eine Längenänderung, deren Betrag unter der zu erreichenden Genauigkeit liegt. Der Zwischenraum zwischen der Oberfläche des Quarzzylinders und der Deckplatte der Gaskammer ist mit dem Kathetometer gemessen worden zu 0,58 mm, nur durch die Wandung der Gaskammer hindurch betrachtet; zu 0,56 mm durch das ganze Gefäß hindurch gemessen, ehe es ausgepumpt wurde, und zu 0,57 mm, nachdem es luftleer war. Bei der tiefen Temperatur ist die Entfernung zu 0,31 mm bestimmt worden. Diese Abstandsmessungen geschahen immer an acht einander gegenüber liegenden Stellen.

Es wurden gefunden bei

	752,32 mm Druck und 77,97°		
$\lambda$	643,9	546,1	435,8
$n$	1,001077 (9)	1,001084 (7)	1,001100 (7)

Den Verlauf der Dispersion des Stickstoffes zeigt die Fig. 4. Als Abszissen sind die Wellenlängen, als Ordinaten die Brechungsverhältnisse aufgetragen (2 mm entsprechen einer Einheit der sechsten Stelle nach dem Komma).

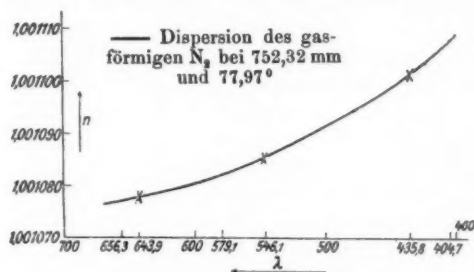


Fig. 4.

### III. Wahres Brechungsverhältnis des flüssigen Stickstoffs.

Augustin hat in seiner Arbeit das Brechungsverhältnis des flüssigen Stickstoffs gegen gasförmigen Stickstoff bestimmt bei 745,12 mm Druck. Unter Benutzung der im ersten

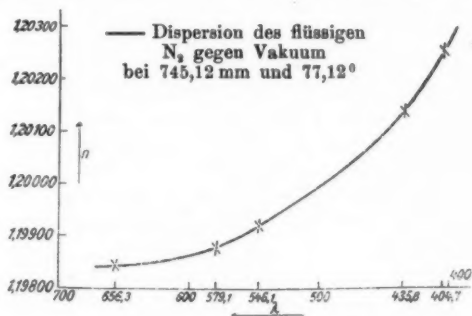


Fig. 5.

Teil der Arbeit ermittelten Dichte und des im zweiten Teil ermittelten Brechungsverhältnisses und unter Umrechnung dieser Werte auf den Zustand von 745,12 mm Druck und 77,12° erhält man für das wahre Brechungsverhältnis  $n_F$  des flüssigen Stickstoffes folgendes:

$\lambda$	656,3	579,1	546,1	435,8	404,7	Druck 745,12 mm
$n_F$	1,19844	1,19876	1,19918	1,20142	1,20258	Temp. 77,12°

#### IV. Formzahl für die Stickstoffmolekel.

O. Wiener<sup>1)</sup> hat in seiner Arbeit „Zur Theorie der Refraktionskonstanten“ die in der Lorenz-Lorentz'schen Refraktionsformel vorkommende Zahl 2 durch eine Größe  $u$  ersetzt, die er die Formzahl nennt. Aus der Größe von  $u$  lassen sich gewisse Schlüsse auf die Gestalt der Molekeln der untersuchten Substanz ziehen.  $u = 2$  bedeutet, daß die Molekeln der betreffenden Substanz Kugelgestalt besitzen, während  $u > 2$  sich ergibt für solche Substanzen, deren Molekel von der Kugelform abweicht.

Bedeutet  $n_F$  und  $d_F$  Brechungsverhältnisse und Dichte für die Flüssigkeit bzw.  $n_G$  und  $d_G$  dasselbe für das Gas bei der gleichen Temperatur und dem gleichen Druck, so lautet die Refraktionsformel nach Einführung der Formzahl  $u$

$$\frac{n_F^2 - 1}{n_F^2 + u} \cdot \frac{1}{d_F} = \frac{n_G^2 - 1}{n_G^2 + u} \cdot \frac{1}{d_G}.$$

Daraus ergibt sich:

$$u = \frac{n_F^2 \cdot d_F \cdot (n_G^2 - 1) - n_G^2 \cdot d_G \cdot (n_F^2 - 1)}{d_G \cdot (n_F^2 - 1) - d_F \cdot (n_G^2 - 1)}.$$

Die Dichte des flüssigen Stickstoffes ist von Dewar<sup>2)</sup> bestimmt worden zu 0,8042 bei  $-195,5^\circ \text{C.}$  und zu 0,8792 bei  $-210,5^\circ \text{C.}$  Daraus ergibt sich bei 77,12° die Dichte zu  $d_F = 0,8066$ .

Man erhält für  $u$  die Werte:

$\lambda$	656,3	579,1	546,1	435,8	404,7	Mittelwert: 2,16 $\pm$ 0,04
$u$	2,06	2,12	2,13	2,24	2,26	

1) O. Wiener, Ber. d. Math.-Phys. Kl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. **62**. S. 256. 1910.

2) J. Dewar, Proc. Roy. Soc. **73**. S. 251. 1904.

Der Zusammenhang zwischen den Werten von  $u$  und den Wellenlängen ist durch Fig. 6 dargestellt.

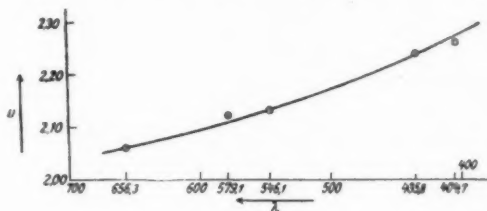


Fig. 6.

Führt man in die Lorenz-Lorentzsche Formel den Wert 2,16 ein und führt nochmals dieselben Rechnungen durch, so erhält man wieder die gleichen Werte  $n_0$ .

$u = 2,16$  bedeutet, daß sich die Stickstoffmolekeln dielektrisch so verhalten, als ob ihre Gestalt nahezu kugelförmig wäre. Besonders bemerkenswert ist die Feststellung, daß die Stickstoffmolekel ihrem dielektrischen Verhalten nach für rotes Licht nahezu Kugelgestalt besitzt, aber nach dem Violett zu von der Kugelform immer mehr abweicht. Es liegt der Gedanke nahe, dieses Verhalten in Zusammenhang zu bringen mit den Vorstellungen, die dem Bohrschen Atommodell zugrunde liegen. Darnach werden die Elektronen, welche für Absorption im kurzwelligen Gebiet in Frage kommen, größere Bahnen beschreiben als für die das langwellige. Nicht für jede Molekel würde dies einen Unterschied bedingen, z. B. nicht für Wasserstoffmolekel, bei der die Abmessungen in der Molekel für verschiedene Bahnen der Elektronen ähnlich bleiben. Für eine so verwickelte Molekel wie die Stickstoffmolekel wird das schwerlich der Fall sein. Jedenfalls spricht das experimentelle Ergebnis gegen die Annahme ähnlich bleibender Abmessungsverhältnisse in der Molekel bei wachsendem Durchmesser der Elektronenbahnen. Aus der dargestellten Betrachtung ist die Bedeutung der ermittelten Formzahl für den Molekelbau ersichtlich.

Die Hauptmessungen bei Bestimmung der Dichte und des Brechungsverhältnisses wurden in Gemeinschaft mit Hrn. Dr. Möbius gemacht, um zunächst in Anbetracht der wenigen

Messungen eine Prüfung zu haben. Die beiden Beobachter kamen unabhängig voneinander zu den gleichen Ergebnissen. Auch war es auf diese Weise leichter möglich, alle Nebenumstände (Luftdruck, Zimmertemperatur, Sauerstoffgehalt der Gase usw.) in der durch die Menge des vorhandenen flüssigen Stickstoffes vorgeschriebenen Zeit des öfteren bestimmen zu können.

Die Untersuchungen wurden im Physikalischen Institut der Universität Leipzig ausgeführt. Es sei mir gestattet, Hrn. Professor Dr. Wiener für die Anregung zu dieser Arbeit und die dauernde Unterstützung meinen besten Dank auszusprechen. Ferner möchte ich danken Hrn. Professor Dr. Füchtbauer und nach dessen Weggang ganz besonders Hrn. Privatdozent Dr. Möbius, der durch seinen dauernden wertvollen Rat und seine liebenswürdige Unterstützung die Arbeit wesentlich gefördert hat. Auch Hr. Professor Dr. Lilienfeld hat mir seine großen Erfahrungen auf kältetechnischem Gebiet in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt.

Leipzig, Physikalisches Institut, Dezember 1920.

(Eingegangen 8. Januar 1921.)



